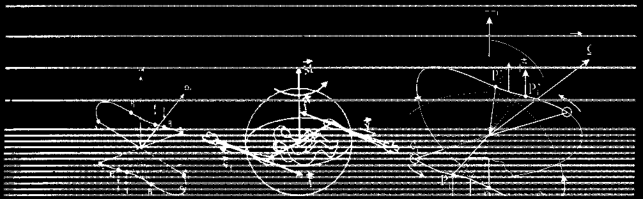
MECÁNICA ELEMENTAL

Juan G. Roederer



eudeba

manuales

MECÁNICA ELEMENTAL

Juan G. Roederer

eudeba

Roederer, Juan G.
Mecánica elemental - 2a ed. 2a reimp. - Buenos Aires : Eudeba, 2008.
256 p. ; 25x18 cm. (Manuales)

ISBN 978-950-23-1225-5

1. Mecánica. I. Título
CDD 620.1

Eudeba

Universidad de Buenos Aires

Segunda edición: septiembre de 2002
Segunda edición, segunda reimpresión: abril de 2008

Editorial Universitaria de Buenos Aires
Sociedad de Economía Mixta
Av. Rivadavia 1571/73 (1033) Ciudad de Buenos Aires
Tel: 4383-8025 / Fax: 4383-2202
www.eudeba.com.ar

Realización de interior: *Héctor O. Pérez*
Diseño de tapa: *Silvina Simondet*
Composición general: Eudeba

Impreso en Argentina
Hecho el depósito que establece la ley 11.723

Índice

Prefacio a la nueva edición

"Éste no es un libro de texto..."

Así ha comenzado el capítulo introductorio del libro *Mecánica Elemental* en cada una de sus reimpresiones, desde su primera publicación en 1963. Hoy en día hay muchos libros de texto en castellano, algunos traducidos de otros idiomas, que satisfacen requisitos actuales –como ser, ilustraciones sofisticadas, texto detallado con notas históricas, problemas (a veces con un complemento de soluciones), bibliografía extensa, etcétera–. El propósito del presente volumen es mucho más modesto (pero no menos importante): ayudar a *entender* la física, tal como aparece por primera vez "en serio" en la vida de un estudiante, durante el curso de Física I (o *Physics* 101, o como se llame en las universidades de otros países).

Después de casi cuarenta años y numerosas reimpresiones, hemos preparado una edición más "elegante", computarizada. El contenido, sin embargo, permaneció prácticamente intacto, salvo correcciones de errores obvios y el agregado de unas páginas al final del primer capítulo. En efecto, los muchos comentarios positivos recibidos de ex estudiantes de física, durante el transcurso de todos estos años, me han convencido de que no hace falta introducir grandes cambios o retoques. Por lo tanto, he decidido seguir el proverbio que en dialecto norteamericano dice: *if it ain't broke, don't fix it* (si no está roto, no lo arregles). Quizás –ya que ahora el texto está cómodamente instalado en la memoria de mi computadora– algún día cuando me jubile "en serio" pueda reescribir el texto en su totalidad para una nueva edición.

Ya en la primera edición de 1963 afirmé que "los grandes problemas en las disciplinas como la biología, la química, la meteorología, la geología, la astronomía o la fisiología están íntimamente vinculados al conocimiento de los procesos físicos intervinientes. Es así como, con singular arrogancia, la física ha invadido prácticamente todas las ramas del conocimiento humano". ¡Esto es cierto hoy más que nunca! Basta echarle un vistazo a algunos de los grandes problemas que afectan a la sociedad humana: el crecimiento de la población mundial y sus efectos sobre la demanda de energía y recursos naturales; la consecuente puja entre conservación ambiental y desarrollo industrial y urbano; la disposición permanente de desechos contaminados; las incertidumbres en la predicción del clima y sus consecuencias para el planeamiento de desarrollo sustentable; la creciente vulnerabilidad de centros urbanos y sistemas tecnológicos a desastres naturales; la creciente exposición del ser humano a microorganismos y virus nuevos o mutados; el diagnóstico y tratamiento de enfermedades neurológicas; la detección de armas y prevención de actos terroristas. Para su solución ¡todos exigen la participación de científicos con una sólida base de conocimientos de física! Esto asienta una responsabilidad sin par en los hombros (mejor dicho, los cerebros) de los físicos y de los que enseñan esta disciplina.

"Saber física" no es cuestión de poder recitar de memoria todas sus leyes y aplicar fórmulas teóricas o métodos de medición a ciegas como si fueran recetas de cocina. Todo eso, en última instancia, se puede hacer consultando libros. "Saber física" es tener la intuición correcta sobre cómo el mundo material "funciona": cómo algunas magnitudes observables se relacionan entre sí y por qué; cómo unas varían en total independencia de otras; y cómo se expresa la "realidad exterior" en forma de modelos simplificados tratables matemáticamente. En efecto, en base a cincuenta años en la profesión, me permito afirmar que *la física es tanto un arte como una ciencia y una técnica*: el arte de construir modelos mentales apropiados, la ciencia de formular métodos cuantitativos para la predicción (o "posdicción") del comportamiento de un sistema, y la técnica de extraer la información necesaria de la naturaleza. Y, dentro de la física, ¡la *mecánica* es el mejor punto de partida para empezar a aprender todo esto!

Fernando Morrison, joven estudiante de física de mi *alma mater*, la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, me ayudó "a distancia" con gran esmero y dedicación en la preparación del texto electrónico... ¡durante el tiempo mismo en que estaba cursando la materia! Mi esposa Beatriz, egresada de esa misma facultad, pasó incontables horas dictándome el texto original durante la preparación del archivo electrónico. A ambos, mi profundo agradecimiento.

Juan G. Roederer

Junio de 2002

Introducción

Éste no es un libro de texto. Es un librito cuya única pretensión es la de servir de complemento para quienes estudian o enseñan los fundamentos de la mecánica en el nivel universitario elemental.

Para dar la estructura adecuada a un curso de física es necesario, en primer lugar, fijar claramente los objetivos centrales del mismo. Como tales, he elegido para el curso de *Física I* la enseñanza, con toda la profundidad y solidez compatibles con el nivel y el tiempo disponibles, de los conceptos fundamentales de la mecánica. En particular, me atuve a los siguientes criterios:

1. Evitar las definiciones dadas "por decreto", dando nombre a los entes físicos, recién después de haber mostrado su significado, y enunciando explícitamente las razones por las cuales se introducen.

2. Presentar correctamente el papel que juegan los algoritmos matemáticos en la descripción de los fenómenos físicos, indicando explícitamente la diferencia nítida existente entre criterios matemáticos y físicos.

3. Presentar como punto de partida de la dinámica el estudio del "proceso de interacción", noción fundamental sobre la que se edifican la física (y las demás ciencias naturales).

4. Convencer al estudiante de que la física trabaja con modelos simplificados de la realidad y enunciar explícitamente los límites de validez de toda afirmación, ley o fórmula física, circunscribiendo claramente el dominio de la física clásica.

5. Preparar adecuadamente al estudiante para los cursos superiores, para evitarle el *shock* de transición tardía y repentina a la física cuántica y relativista; facilitarle la comprensión correcta del alcance de nociones tan fundamentales como "incertidumbre", "covariancia", "relatividad", etc.

En la primera parte del *Capítulo 1* se esboza el sendero por el cual se debe llevar al estudiante en el escabroso terreno del "proceso de medición". Lindero con profundos y peligrosos abismos metafísicos, constituye sin embargo la base de la física experimental. En la segunda parte de este capítulo se da una rápida visión de la teoría elemental de errores, con vistas a las necesidades reales de un físico experimental.

En el *Capítulo 2* se intenta convencer al estudiante de que la cinemática no es una rama de la geometría, sino que representa el estudio de las consecuencias físicas del hecho físico de la continuidad del movimiento físico.

Considero el *Capítulo 3* como el más fundamental del curso. En él se describen las leyes que se cumplen en todos los procesos de interacción entre dos cuerpos puntuales, cualquiera sea la naturaleza del mecanismo de interacción. Se analizan las tres interacciones macroscópicas más importantes para la mecánica clásica: la gravitatoria, la elástica y la interacción de frotamiento.

El *Capítulo 4* es una extensión del tercero, en el cual se deducen los teoremas de conservación y se presentan las constantes de movimiento como entes útiles para la descripción de las limitaciones intrínsecas de movimiento que aparecen en todo proceso de interacción. Se pone especial énfasis en el "pobre" impulso angular, a menudo tan temido y esquivado en los cursos elementales.

En el *Capítulo 5* se aplica la dinámica al estudio del cuerpo rígido. Es el capítulo más difícil de estructurar, por los continuos rodeos que se deben dar para evitar el uso del cálculo tensorial.

En el *Capítulo 6* se estudia la deformación elástica de un cuerpo en equilibrio. Nuevamente, los rodeos necesarios para esquivar los tensores hacen ardua la tarea del dictado de clases.

En el *Capítulo 7*, finalmente, se presentan los aspectos fundamentales del fenómeno de propagación de una onda elástica plana, con sus aplicaciones en acústica.

Los ejemplos dados en este fascículo no pretenden ser una exposición sistemática de aplicaciones, sino que sirven para complementar o ilustrar mejor un determinado concepto o método. Es requisito previo, para poder seguir este curso, tener una visión clarísima de los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral de una variable.

La física es una ciencia experimental. Su enseñanza desvinculada del laboratorio induce una imagen falsa de esta disciplina. Considero que las demostraciones prácticas en clase son esenciales para ilustrar o completar una idea o un hecho físico. Pero considero aún más importante brindar al estudiante la posibilidad de experimentar el método de la física con sus propias manos: debe ser él mismo quien verifique el cumplimiento del mayor número posible de leyes o relaciones físicas. Por ello es imprescindible asociar a todo curso de física una serie de trabajos prácticos, los cuales deben cumplir los siguientes requisitos:

1. El propósito fundamental de un trabajo práctico debe ser la verificación experimental, por parte del alumno, de alguna relación entre magnitudes físicas. Asimismo, el trabajo debe: *a)* enseñar a medir bien y a trabajar ordenadamente; *b)* enseñar a interpretar el significado estadístico de las mediciones; *c)* enseñar los "trucos" experimentales típicos para las mediciones más frecuentes en la práctica; *d)* dar oportunidad al estudiante para desarrollar su inventiva y fantasía.

2. El trabajo práctico debe contener en pequeño todos los elementos de un trabajo de investigación real: el planteo del problema, la selección de los métodos adecuados para su solución, la realización de mediciones, el análisis de datos, la discusión de su significado experimental, la elección del resultado más plausible, las conclusiones y la confección de un informe.

3. El trabajo práctico debe ser encarado de manera tal que el alumno pueda contestar sin titubeo la pregunta (verdaderamente trivial): ¿qué he aprendido en concreto al realizar este trabajo?

Simultáneamente, un curso de física debe ir acompañado de una intensa práctica de resolución de problemas. Éstos deben cumplir los siguientes requisitos:

1. El propósito fundamental de un problema debe consistir en convencer al alumno de la utilidad de un concepto dado, o de una relación física dada, para predecir el comportamiento de un sistema físico (o de "posdecir" su pasado). Asimismo debe: *a)* enseñar a discutir desde el punto de vista físico una relación matemática entre magnitudes; *b)* enseñar a aproximar matemáticamente, en la medida que las condiciones físicas del problema lo permitan; *c)* enseñar a predecir el comportamiento de un sistema cualitativamente, basándose en razonamientos físicos, *sin* uso de cálculos numéricos; *d)* dar un panorama actual de la aplicabilidad de los conceptos físicos en diversos dominios de la física, la técnica y las demás disciplinas.

2. Evitar problemas cuyo único fin consista en resolver una fórmula dada, o que estén desvinculados de la realidad.

3. Cada problema debe ser encarado de manera tal que el alumno pueda contestar sin titubeo la pregunta (nuevamente trivial): ¿qué he aprendido en concreto al resolver este problema?

El autor

Capítulo 1

El proceso de medición

a) Magnitud física

La física es una ciencia experimental. Estudia procesos del mundo físico en su forma más general, independientemente de su valor práctico inmediato, y establece un cierto número limitado de leyes con las cuales se puede explicar la mayor variedad posible de los fenómenos observados y predecir cuantitativamente su comportamiento. Que sea ciencia experimental significa que los fenómenos bajo análisis deben *observarse* y *medirse*. Cualquier aseveración en física carece de sentido si la misma o sus consecuencias lógicas no pueden ser comprobables experimentalmente.

Vamos a analizar el *proceso de medición*; proceso fundamental para la física y punto de partida de toda teoría física. El proceso de medición es una operación física experimental, en la que intervienen necesariamente tres sistemas: el "sistema objeto" al cual queremos medir, el instrumento o *aparato de medición* y el "sistema de comparación" que definimos como unidad y que suele venir unido o estar incluido en el aparato o instrumento de medición.

Por ejemplo: en el proceso llamado "medición de longitud" intervienen:

1. El objeto cuya longitud queremos medir.
2. El instrumento, por ejemplo, una regla.
3. La unidad (cierta escala marcada en la misma regla, cierta barra patrón, o cierta longitud de onda espectral).

Para definir unívocamente el proceso de medición es necesario dar además la "receta" mediante la cual deben ponerse en interacción el sistema objeto, el aparato de medición y la unidad. En particular, el procedimiento físico correspondiente a esta receta, realizado entre el aparato de medición y la unidad, se denomina "calibración" del aparato.

Por ejemplo, la "receta" para medición de longitudes sería: "tómese un cierto instrumento llamado regla, en la que están marcadas cierto número de divisiones; hágase coincidir la primera división de la regla con un extremo del objeto cuya longitud se quiere determinar; determínese la división que coincide con el otro extremo del objeto. Por otra parte, realícese el mismo procedimiento con el objeto que se definió como unidad (calibración de la regla)".

Medir temperaturas significa: "tomar un instrumento llamado termómetro, ponerlo en contacto térmico con el sistema que queremos medir, esperar que se establezca equilibrio térmico, medir la longitud de la columna de mercurio, etc.".

Medir el peso de un cuerpo significa: "tomar el cuerpo, ponerlo sobre el platillo de un instrumento llamado balanza, colocar pesos unidad en el otro platillo hasta equilibrar la balanza, leer el número de pesos unidad".

Cada proceso de medición define lo que se llama una *magnitud física*. Estas últimas están unívocamente determinadas por el proceso de medición. Por ejemplo, se define como "longitud" aquello que se mide en el proceso descripto como "medición de longitudes". "Peso" es aquello que se mide con el proceso físico denominado "pesar un cuerpo". Esto podría parecer trivial; sin embargo, es importante notar que no hay otra forma de definir una magnitud física más que por la descripción del proceso de medición en sí. En otras palabras, el concepto físico primario es el de proceso de medición, y no el de magnitud física.

Hay muchos procesos de medición que definen una misma magnitud. Por ejemplo, hay muchas formas de medir una longitud. Son procesos de medición *equivalentes*. El resultado de un proceso de medición es un número real, que se llama *valor de la magnitud* en cuestión. Se lo interpreta intuitivamente como el "número de veces que la unidad está contenida en la magnitud en cuestión". Dos objetos tienen una cierta magnitud dada igual cuando el resultado del proceso de medición (que define la magnitud en cuestión) aplicado a ambos objetos es el mismo, o sea, cuando se obtiene el mismo valor numérico.

Tenemos en resumen dos conceptos definidos a partir del proceso de medición:

Proceso de medición:
- define una magnitud física.
- da como resultado el "valor" de la magnitud.

La *suma* de dos magnitudes (de igual tipo, por supuesto) debe definirse por un proceso físico. Por ejemplo, la longitud "suma" de las longitudes de dos varillas es la longitud del sistema que se obtiene alineando paralelamente las dos varillas en fila, una a continuación de la otra, haciendo coincidir el extremo de una con el principio de la otra. Una magnitud física es "genuina" cuando el valor de la magnitud suma es la suma de los valores de las magnitudes originales. Esto no es trivial. Si ello no sucede, la magnitud en cuestión no es una magnitud física genuina. Por ejemplo, la temperatura no es aditiva. Si quisiéramos definir la operación "suma" de temperaturas como proceso físico (juntando dos cuerpos de temperaturas T_1 y T_2 y esperando que se establezca equilibrio térmico), veremos invariablemente que el valor numérico de la temperatura del sistema final o suma no es la suma de los valores $T_1 + T_2$.

El valor de una magnitud dada es independiente del proceso particular de medición, dependiendo sólo de la unidad elegida. Como esta unidad, en principio, es arbitraria y se fija por convención, es necesario añadir un símbolo al valor numérico de una magnitud dada para indicar cuál unidad ha sido utilizada como comparación. Por ejemplo, se escribe "1 m", "10 pies", "25 seg", etc. Decir que una longitud es "2,5" no tiene sentido físico si no se indica la unidad de referencia.

Cuando cambiamos de unidad, el valor numérico de una misma magnitud cambia. Es necesario conocer la *regla de transformación* para los valores numéricos de las magnitudes.

Sean L y L' dos unidades de longitud distintas, y x el número real que representa el valor de la longitud de un objeto dado cuando se usa L como unidad. Sea además λ el número real que representa el valor de la longitud de la unidad L medida con la unidad L'

(número de veces que la unidad L' está contenida en L). La regla de transformación que sufre el número x cuando se pasa de la unidad L a la L' es:

$$x' = x\lambda \qquad (1.1)$$

o sea, el "nuevo" valor es igual al "viejo" valor multiplicado por el número de veces que la nueva unidad está contenida en la vieja unidad. Observemos que la (1.1) es una relación entre números.

Para recordar la regla de transformación se utiliza la convención arriba indicada para escribir los valores numéricos de una magnitud. Sea una longitud de "3 m". Ello significa que "$x = 3$" y "la unidad L es el metro patrón". Si ahora cambiamos de unidad, la operación por realizar es: reemplazar el símbolo m por el valor (número real) de esa unidad (metro) medido con la nueva unidad y hacer el producto correspondiente.

Por ejemplo, si la nueva unidad L' es el cm, dado que la longitud del metro patrón contiene 100 veces el centímetro, el nuevo valor de x' será, según la (1.1):

$$x' = 3 \,.\, 100 = 300$$

O sea, con la nueva unidad escribimos "300 cm".

Hay que tener mucho cuidado: "3 m" o "300 cm" es una expresión simbólica. El "m" o "cm" es un símbolo que indica dos cosas:

1. la unidad que se eligió al expresar el valor;
2. nos recuerda que si se cambia la unidad, debemos multiplicar el valor original de la magnitud por el valor de la unidad original medida con la nueva unidad.

Por ese motivo, la igualdad:

$$3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$$

es simbólica y no tiene significado algebraico. El significado físico es: la longitud cuyo valor es 3 cuando la unidad es el metro es la misma que aquella cuyo valor es 300 cuando la unidad usada es el centímetro.

Hemos dicho que el proceso de medición, punto de partida de toda teoría física, es, en esencia, una interacción entre tres sistemas: el sistema objeto, el aparato de medición y el sistema unidad. Supongamos ahora que queremos medir la temperatura de un centímetro cúbico de agua con un termómetro de dos metros de largo que contiene medio kilogramo de mercurio. ¿Qué sucede? Lo único que lograremos es que el centímetro cúbico de agua adquiera la temperatura del termómetro. La lectura del termómetro nada tendrá que ver con la temperatura inicial del agua. Consideremos otro caso: queremos medir la velocidad de un proyectil por el impacto que causa sobre un objeto. Si bien podemos obtener información sobre la velocidad del proyectil, habremos destruido con nuestra medición nuestro sistema objeto. Sería imposible volver a repetir la medición con el mismo proyectil. En ambos ejemplos, el proceso de medición ha perturbado sustancialmente el sistema que quisimos medir.

Pensándolo bien, es fácil darse cuenta de que en todo proceso de medición el aparato de medición perturba en mayor o menor grado el sistema que se está midiendo. Lo que la *física clásica* supone es que, si la perturbación resultó apreciable, siempre es posible construir un aparato de medición más perfecto, con el que se obtendría una perturbación menor.

Este principio no "funciona" en el dominio atómico. Efectivamente, se comprueba experimentalmente que, cuando nos aproximamos al dominio atómico, nunca podemos perfeccionar nuestros procesos de medición más allá de cierto límite; es decir, nunca podemos reducir la perturbación del proceso de medición a cero. En otras palabras: jamás podría observarse y medir un sistema atómico sin molestarlo o perturbarlo sensiblemente.

La llamada "física clásica" fue edificada sobre la hipótesis de la posibilidad de perfeccionar los procesos de medición indefinidamente. Como esto no vale en el dominio atómico, la física clásica no vale en este dominio. No hay que sorprenderse entonces que en ese dominio pasen "cosas raras", como, por ejemplo, el comportamiento "dual" de la materia: según por qué método se observe una partícula atómica, ¡ésta parece comportarse como "onda" o como "partícula"! Esto deja de aparecer como misterio de la naturaleza si se tiene bien presente que en el dominio atómico es imposible "observar sin perturbar", influyendo el propio proceso de medición sobre lo que se está observando. "Lo que es" la partícula mientras no se la está observando (mientras no está interactuando) *no* tiene sentido físico, por lo expresado en la última frase del primer párrafo de este capítulo.

b) Errores de medición

Volvamos al proceso de medición y consideremos el valor numérico obtenido. Dijimos que es un número real. Un número real en el sentido matemático está representado por un número infinito de guarismos. Es evidente que esto no se obtiene como resultado de una medición. Hay un límite *a priori* dado por el instrumento o aparato de medición, en el cual aparece necesariamente un cierto límite de apreciación, dado por el mínimo valor distinguible en una medición.

Si, por ejemplo, se tiene una regla graduada en cm y mm, en la cifra que expresa el valor de una longitud dada sólo estará asegurado el guarismo correspondiente al milímetro. Por ejemplo: en el valor "3,25633" no tendrían sentido las dos últimas cifras (33) (pues sólo serían producto de la imaginación).

Si se repite una medición varias veces, el resultado expresado en cifras significativas dadas por la escala del instrumento debería ser el mismo en cada caso, siempre que la magnitud por medirse se mantenga constante. Pero en general esto no sucede. Aun si en cada medición podemos asegurar *a priori* hasta un cierto número de guarismos, los valores obtenidos en mediciones consecutivas no suelen coincidir.

Consideremos un ejemplo: yo mido una cierta longitud cien veces con mucho cuidado y obtengo los mismos valores numéricos en cada medición. Pero ahora tomo unas copas de vino y vuelvo a hacer cien mediciones. ¿Volveré a obtener valores coincidentes en cada caso? Evidentemente no; la "borrachera" me impedirá ver nítidamente las líneas y los números de la regla, así como los confines del objeto que estoy midiendo. Si, por otra parte, tomo una regla muy corta y (sin estar borracho) mido la longitud de un objeto largo,

tampoco obtendré el mismo resultado en todas las mediciones. Esto se debe a que en el proceso de transporte de la regla se cometen inevitablemente ciertos errores mecánicos.

Supongamos entonces que hemos hecho una serie de N mediciones de una misma magnitud, que han dado los valores numéricos $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots x_{N-1}, x_N$, todos ellos expresados en cifras significativas exclusivamente. ¿Qué hacemos con estos valores? Vamos a plantearnos claramente el problema: tenemos una serie de N mediciones con N resultados en general diferentes. Sabemos, además, que la magnitud dada puede tener, en realidad, un solo valor numérico. ¿Cómo podemos "fabricar" de esos N valores uno solo, que esté "lo más cerca posible" del "verdadero valor", al cual desconocemos? En términos más correctos: ¿Cómo podemos volcar la información dada por esos N números hacia uno solo, que podamos adoptar como "el valor más probable de la magnitud"?

Sea $\overline{X}$ el número que adoptamos como "valor más probable" de la magnitud. Las diferencias $\overline{X} - x_i = \varepsilon_i$ se llaman "desviación de cada medición" respecto de $\overline{X}$. Tendremos N desviaciones $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_i, \ldots\ldots \varepsilon_N$. Serán, en general, números positivos y negativos. La suma algebraica $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots \varepsilon_i + \ldots\ldots \varepsilon_N$ no tendrá mucho significado físico. Incluso puede ser cero, aún siendo grandes los ε_i si los valores positivos y negativos de los ε_i se compensan mutuamente. En cambio, la suma de los cuadrados, o suma de "desviaciones cuadráticas"

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$$

será una magnitud más representativa, que nos dará una idea global de cómo fluctúan los valores medidos x_i alrededor de $\overline{X}$. Es evidente que esa suma depende del valor que elijamos para $\overline{X}$:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\overline{X} - x_i\right)^2 = N\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

Obtenemos una función cuadrática de $\overline{X}$ que pasa por un mínimo para un cierto valor de $\overline{X}$. Con esta expresión encontramos la posibilidad para un criterio "razonable" (por ahora convencional) para definir el "valor más probable de una magnitud" obtenido a partir de N mediciones individuales x_i. Elegimos como tal el valor de $\overline{X}$ que haga mínima la suma cuadrática de las desviaciones. Esto es lo más razonable que se puede hacer por ahora; más adelante quedará totalmente justificado.

O sea, $\overline{X}$ debe satisfacer la siguiente condición de extremo:

$$\frac{d}{d\overline{X}} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{d\overline{X}}\left(N\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) = 2N\overline{X} - 2\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$$

lo que nos da

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \text{(promedio aritmético de las } x_i\text{).} \qquad (1.2)$$

El *promedio aritmético* de los valores x_i es entonces lo que elegimos como "valor más probable" o "valor más razonable" de la magnitud en cuestión. Es el valor (único) que hace mínima la suma cuadrática de las desviaciones.

Volvamos a esa suma cuadrática $\sum \varepsilon_i^2$. Esta cantidad tiene el inconveniente de que su valor no sólo depende de las fluctuaciones, sino también del número total de observaciones N. Efectivamente, es fácil comprender que esta suma de sumandos positivos puede ser arbitrariamente grande, aun para muy pequeños valores de ε_i, con tal de ser el número de sus sumandos (N) suficientemente grande.

Para independizarnos de este número ocasional N, definimos la cantidad llamada *varianza* v, que es el promedio de las desviaciones cuadráticas, y que ahora sí sólo depende de la forma en que los datos individuales fluctúan alrededor del promedio, siendo independiente del número total de observaciones:

$$v = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{N} = \frac{\sum\left(\overline{X} - x_i\right)}{N} = \frac{\sum x_i^2 - N\overline{X}^2}{N} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \qquad \text{(Ver nota 1)}$$

En la expresión precedente hemos tenido en cuenta (1.2); $\overline{X^2} = \sum x_i^2 / N$ es el promedio de los cuadrados de x_i (¡que *no* es igual al cuadrado del promedio $\overline{X}^2$, a menos que todas las x_i sean iguales entre sí!). Las dimensiones físicas de v no son las de los datos originales, puesto que éstos figuran elevados al cuadrado. Por lo tanto, se introduce la cantidad

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{\sum\left(\overline{X} - x_i\right)^2}{N}} = \sqrt{\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)} \qquad (1.3)$$

1. En realidad, por razones matemáticas debe definirse la varianza como $v = \sum \varepsilon_i^2 / (N-1)$. Pero como en física experimental siempre suele ser $N >> 1$, la expresión dada arriba es una aproximación suficientemente buena. Tal como está escrita, la ecuación es rigurosamente correcta si se reemplaza el promedio $\overline{X}$ por el "verdadero valor" de la magnitud en cuestión [en general desconocido en la práctica].

que tiene las mismas dimensiones que $\overline{X}$ (por ejemplo: una longitud, si las x_i son longitudes), y que por lo tanto se puede comparar numéricamente con $\overline{X}$. En la (1.3) tuvimos en cuenta que $\sum \overline{X}^2 = N\overline{X}^2$. σ nos da una idea cabal y precisa de la mayor o menor fluctuación o dispersión, en forma global, de los valores de x_i alrededor del promedio $\overline{X}$. σ se llama *dispersión o error estándar, o error cuadrático medio de cada medición*. Obsérvese que $\sigma = 0$ sólo si cada uno de los ε_i es nulo, o sea, si todos los valores de x_i son iguales entre sí. Tal como la varianza, σ depende sólo del proceso de medición en sí.

La cantidad $\eta = \sigma/\overline{X}$ se llama error o desviación *relativa* de cada medición; $100\eta = \sigma/\overline{X}$ se llama error porcentual de cada medición. Obsérvese que el error relativo, que no tiene dimensiones, es una cantidad que nos representa la forma numérica más intuitiva posible del concepto de "error" o dispersión. Efectivamente, cuando decimos que un error dado es del 10%, tenemos con ello una información sobre la calidad de la medición, que es totalmente independiente de lo que estamos midiendo. Ello no ocurre con el error estándar absoluto: si decimos que en la medición de una longitud el error estándar es de 10 cm, ello puede representar una medición excelente, si la longitud que se mide es de centenares de metros, pero puede significar una medición "mala" si el objeto medido tiene sólo 20 cm. El error relativo, asimismo, permite una comparación de la calidad de mediciones de diferentes magnitudes entre sí.

Supongamos que hemos obtenido un promedio $\overline{X}$ de una serie de mediciones $x_1.....x_N$. Hagamos ahora otra serie de N mediciones en las mismas condiciones que la anterior, obteniendo los valores $x'_1.....x'_N$. El promedio $\overline{X}'$ de esta segunda serie no tiene por qué coincidir con el de la primera: $\overline{X}' \neq \overline{X}$. Tampoco las desviaciones estándar σ y σ' serán idénticas aunque su orden de magnitud siempre será el mismo, puesto que representan una característica del proceso de medición en sí que, por hipótesis, es el mismo en ambas series.

En general, los promedios $\overline{X}', \overline{X}'',....., \overline{X}^k,....., \overline{X}^M$, obtenidos a través de M series de mediciones con N valores cada una, fluctuarán alrededor de un promedio general, o "promedio de los promedios", de valor

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_k^M \overline{X^k}}{M} = \frac{\sum_i^N \frac{x'_i}{N} + \sum_i^N \frac{x''_i}{N} + ... + \sum_i^N \frac{x_i^M}{N}}{M} = \frac{\sum_{l=1}^{MN} \frac{x_l}{N}}{MN} \quad \frac{\text{(suma de todas las } x)}{\text{(total de mediciones)}}$$

La dispersión de esos promedios, considerados como datos individuales de una serie de valores, será:

$$\xi = \sqrt{\frac{\sum_k^M \left(\overline{\overline{X}} - \overline{X}^k\right)^2}{M}} \qquad (1.4)$$

Ésta es la *dispersión estándar de cada promedio* de las series de mediciones. Lo importante es que se puede demostrar que para los casos de errores casuales de medición esta dispersión o error estándar vale

$$\xi = \sqrt{\frac{v}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N^2}} \tag{1.5}$$

Esta relación es en realidad aproximada,[2] pero se convierte en igualdad para N suficientemente grande. σ es la dispersión estándar en una de las M series de mediciones (ya dijimos que el orden de magnitud de las σ^k es el mismo en cada serie). Esto tiene una importancia práctica fundamental: permite predecir la fluctuación del promedio de una serie de N mediciones, sin necesidad de volver a realizar más series de mediciones. En la expresión (1.4) es necesario hacer $N.M$ mediciones. En la expresión (1.5) bastan las N mediciones de una sola serie. Para evitar confusiones y por razones prácticas se conviene en definir como "error estándar del promedio" directamente a la cantidad (1.5) (y no a la (1.4)).

Recuérdese que σ era la dispersión estándar de cada medición, y que era independiente de N. Evidentemente, ξ depende de N, y siempre es menor que σ. Físicamente, da el orden de magnitud con el cual podemos esperar que el promedio ha de fluctuar alrededor del "verdadero valor" de la magnitud en cuestión, en caso de que se hicieran más series de mediciones. El significado más preciso del error estándar del promedio lo daremos en 1.c.

A este respecto nos falta aclarar un punto importante. Según la expresión (1.5) $\xi = \sigma/\sqrt{N}$ y su interpretación física, se desprende que cuanto más mediciones hagamos (mayor sea N), tanto más se acercará el promedio al verdadero valor (pues tanto menor será su fluctuación ξ). Pero esto requiere necesariamente una comprobación experimental. Efectivamente, si por algún medio conocemos *a priori* el valor exacto de una magnitud dada, se comprueba experimentalmente que el promedio $\overline{X}$ tiende a confundirse con el valor exacto de la magnitud, si N tiende a infinito. Esto da ahora "carta de ciudadanía" al uso del promedio como ente representativo del valor más probable de una magnitud.

En resumen, a medida que aumenta el número de mediciones N en una serie, el rango de fluctuación que se espera para el promedio, dado por ξ, será cada vez más restringido, y por lo tanto el valor del promedio $\overline{X}$ tenderá cada vez más a confundirse con el "verdadero valor". Ésa es la razón por la cual el valor de una magnitud se conoce tanto mejor cuanto más mediciones se realizan.

En cambio, un aumento de N (esto se llama "un aumento de la estadística") no afecta en nada a la fluctuación σ de cada dato. Esta fluctuación está definida exclusivamente por el proceso de medición en sí. ξ, en cambio, está definido por el proceso de medición

2. Como en rigor la varianza se define como $v = \sum \varepsilon_i^2 / (N-1)$, el error estándar del promedio será, más exactamente, $\xi = \sqrt{\sum \varepsilon_i^2 / N(N-1)}$.

y la estadística (N). En particular, σ puede ser muy grande (grandes fluctuaciones de los datos individuales); no obstante, el promedio puede estar muy bien definido, con tal de que ξ sea pequeño (o sea N grande). Un individuo "tremendamente borracho" (gran σ) puede hacer una medición muy precisa, con tal de medir un número suficientemente grande de veces (pequeño ξ).

El resultado numérico de una serie de mediciones se indica en la forma $\overline{X} \pm \xi$, o sea, por ejemplo, (3,794 ± 0,039) Para indicar la unidad, se escribe: (3,794 ± 0,039) m. La cantidad $\xi/\overline{X}$ se llama error relativo del promedio, $100\xi/\overline{X}$ se llama error porcentual del promedio.

Aparece aquí la cuestión del número de cifras significativas en el promedio y en ξ. Las del promedio estarán dadas evidentemente por el error estándar ξ. Si en el ejemplo anterior 0,039 son todas cifras significativas del error estándar, no tendría sentido expresar el promedio con más de tres cifras decimales.

Pero, ¿cómo determinamos las cifras significativas del error estándar? Para ello habrá que determinar el "error del error", o sea, el orden de fluctuación que esperamos para la expresión de ξ. Para ello hay una fórmula. No la vamos a dar; nos limitaremos a dar la receta práctica, de la que se suelen tomar dos guarismos para el error del promedio.

Sea ahora una magnitud f, función de otras $x, y, z,...$ las cuales están medidas con errores σ_x, σ_y, σ_z,... Se puede demostrar que, en primera aproximación, la dispersión estándar σ de la magnitud f es, en función de las dispersiones σ_x, σ_y, σ_z,...:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + ...} \qquad (1.6)$$

y su error del promedio:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N_x N_y N_z ....}} \qquad (1.6a)$$

donde N_x, N_y, N_z... son los números de mediciones de $x, y,...$, respectivamente. Una forma más cómoda, pero menos aproximada para σ es:

$$\sigma = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right| + ...$$

(suma de valores absolutos).

Apliquemos esta relación para una función potencial del tipo

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma .....:$$
$$\sigma = |\alpha| x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma ..... + |\beta| x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma ..... + |\gamma| x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1} ..... + ...$$

Dividiendo por f obtenemos la dispersión relativa $\eta = \sigma/f$, que aparece ligada a las dispersiones relativas de las variables independientes en la forma sencilla, lineal:

$$\eta = |\alpha|\eta_x + |\beta|\eta_y + |\gamma|\eta_z + ...$$

Finalmente consideremos el caso de tener que hacer el promedio de varios valores, cada uno de error estándar diferente. En ese caso, evidentemente no le atribuye la misma importancia a un dato que tenga un error del 50% que a uno que sólo tenga un error del 1%. Para calcular el valor más probable se procede mediante el método de los "promedios pesados". Se asigna un *peso estadístico* (un número positivo) a cada dato, que en alguna forma mida el "grado de confianza" que le tenemos. Si cada dato tiene entonces su peso estadístico p_i, el promedio pesado es:

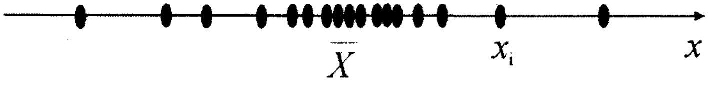
$$\overline{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_N x_N}{p_1 + p_2 + ...p_N} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$$

Para obtener los valores de p_i no podemos dar una regla general. Depende del problema particular. Si, por ejemplo, disponemos de los errores de cada x_i, podemos tomar como p_i números proporcionales a la inversa del error de cada dato (o una potencia de la inversa).

c) Distribución de Gauss

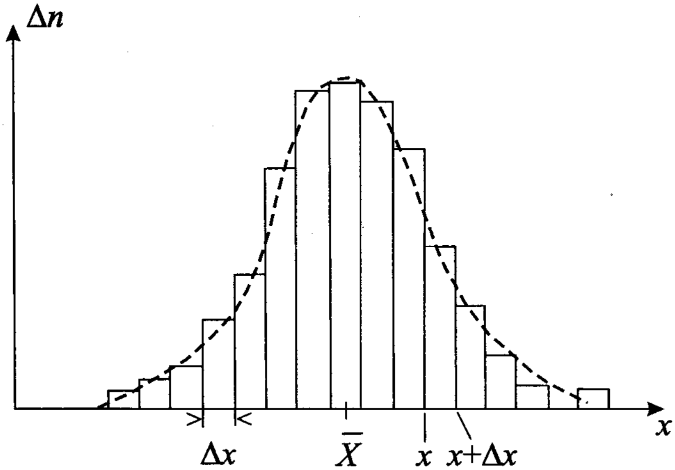
Consideremos de nuevo la serie de resultados de medición: x_1, ..., x_i, ..., x_n. Estos números están distribuidos alrededor del promedio $\overline{X}$. Observaremos que hay valores que están cerca del promedio; otros, menores en número, estarán lejos. Cuando nos proponemos hacer una medición más, la (N+1)-ésima, no podemos saber de antemano el resultado que va a salir, tal como que en ningún caso podemos predecir de antemano el resultado de una medición. Pero es evidente que sí podremos decir que con buena probabilidad estará cerca del promedio, y con probabilidad menor estará lejos. En otras palabras, no podremos nunca predecir el valor de una medición dada, pero sí podremos decir algo sobre la *probabilidad* de que su valor caiga en un determinado intervalo de valores posibles.

Analicemos detenidamente esto. Tomemos un eje, en el cual marcamos los valores de x_i que van apareciendo en nuestra serie de mediciones:



El aspecto suele ser el de la figura. Los valores se "aglomeran" cerca del promedio, y se hacen más ralos a medida que nos vamos alejando de él.

Si dividimos el eje x en pequeños intervalos iguales Δx, podemos contar el número de observaciones Δn que caen en cada intervalo y representarlo gráficamente. Esto es lo que se llama un *histograma* (cuando a todo un intervalo le corresponde un valor, y no a un solo punto, como sucede en una función). Cuanto más grande sea la estadística, o sea N, más pequeños podemos hacer los intervalos Δx sin por ello perder la chance de tener un número suficientemente grande Δn de datos en cada intervalo.



Lo notable de todo esto es que la experiencia muestra que, para todos los casos de errores casuales, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua bien definida y única, cuya forma es siempre la misma, dependiendo sólo de dos parámetros que podrán variar de caso en caso.

Sea Δn el número de valores numéricos de nuestra serie de mediciones, que caen en un determinado intervalo, entre x y $x + \Delta x$. Se comprueba experimentalmente que ese número depende del valor de x y de la longitud del intervalo Δx en la forma aproximada:

$$\Delta n \cong \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \Delta x \qquad (1.7)$$

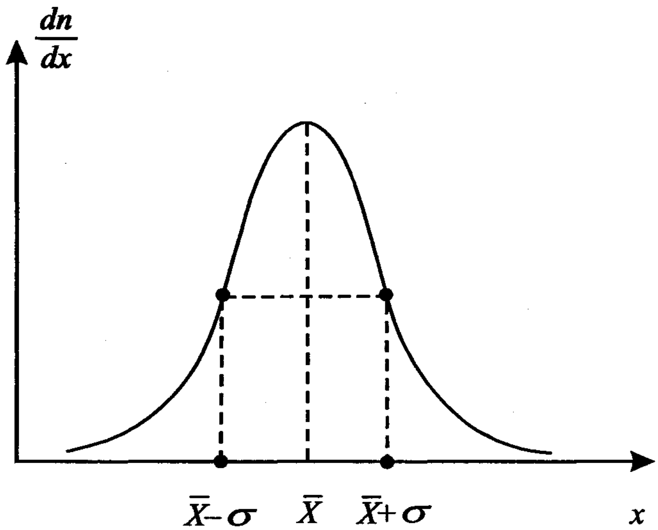
La aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea N y cuanto más pequeño sea Δx. La relación se transforma en igualdad para diferenciales dn y dx.

Como se ve, aparecen dos parámetros: σ y $\overline{X}$ (N no es estrictamente un parámetro, pues no modifica la forma de la curva; es un factor de escala). Se puede demostrar que σ representa lo que precisamente habíamos llamado desviación estándar de cada medición (1.3) y $\overline{X}$ es el valor medio (1.2).

La expresión:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{dn}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.8)$$

se llama "densidad de observaciones". Nótese nuevamente bien la relación entre *dn*, *dx* y *x*: *dn* es el número de observaciones cuyos valores están comprendidos entre *x* y *x+dx*. O sea, la variable *x* que figura en el exponente ubica el intervalo *dx* en el cual se cuentan *dn* observaciones. La representación gráfica de la densidad de observaciones se llama *curva de distribución* o *curva de Gauss*. Tiene la forma de la figura:



Presenta un máximo en $x = \overline{X}$. Es simétrica respecto de ese valor medio, tiene forma de campana, y sus puntos de inflexión están en $\overline{X} \pm \sigma$. Tiende a cero a medida que nos alejamos de $\overline{X}$.

La superficie total subtendida por la curva de Gauss, es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = N$$

(número total de observaciones)

Ésta es precisamente la razón por la cual se coloca el factor $\sqrt{2\pi}$ en el denominador.

La integral:

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} dN = \Delta N \qquad (1.9)$$

es el número de observaciones, cuyo valor está comprendido entre x_1 y x_2. La integral no se puede resolver en forma cerrada; su valor debe buscarse en tablas.[3] Si ahora dividimos el número ΔN por N, número total de datos, o sea:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1.10)$$

obtenemos lo que se llama la *probabilidad* de que una observación dada esté comprendida en ese intervalo. Efectivamente, la probabilidad es por definición el cociente entre el número de casos "favorables" (o sea, en este caso, los que están en ese intervalo x_1 x_2) y el número de casos totales (N). El número $100\Delta N/N$ representa la probabilidad expresada en porciento. La probabilidad de encontrar un dato entre $-\infty$ y $+\infty$ es 1 (o sea 100%), certeza. La probabilidad de encontrar un dato *fuera* del intervalo x_1 x_2 será $1-\Delta N/N$.

En resumen, de esto deducimos que, si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición dada, sí podemos decir algo sobre la probabilidad de que ese valor esté comprendido en un intervalo dado. La predicción de estas probabilidades es la utilidad fundamental de la función de Gauss.

Consideremos unos ejemplos. Ante todo, veamos las probabilidades para algunos intervalos "prototipo".

La probabilidad de que el valor de una medición dada caiga entre $\overline{X}-\sigma$ y $\overline{X}+\sigma$ es, según la (1.10), del 68%; entre $\overline{X}-2\sigma$ y $\overline{X}+2\sigma$ es del 95,4%, y entre $\overline{X}-4\sigma$ y $\overline{X}+4\sigma$ es del 99,99994%. ¡Esto significa que la probabilidad de que una observación caiga fuera del intervalo $\overline{X}\pm 4\sigma$ es de sólo 6.10^{-5}%! El valor de μ que determina el intervalo x $\pm\mu$ dentro del cual cae el 50% de las observaciones se denomina *error más probable*. De la (1.10) resulta $\mu = 0{,}6456\sigma \cong 2/3\sigma$.

Un ejemplo para fijar ideas sobre la utilidad práctica de la distribución de Gauss es el siguiente: supongamos que una fábrica de automóviles compra pistones a un subsidiario. La fábrica necesita que el diámetro de los pistones esté exactamente comprendido dentro del intervalo $(110{,}00 \pm 0{,}02)$ mm (0,02 sería el límite de tolerancia admitida). Con una primera remesa de 100 ejemplares se comprueba, midiendo los diámetros, que el subsidiario provee pistones fabricados con error estándar en el diámetro de 0,04 mm (o sea que los diámetros fluctúan gaussianamente con una dispersión $\sigma = 0{,}04$ mm). ¿Cuántos pistones debe encargar la fábrica para poder seleccionar 1.000 ejemplares que cumplan con los requisitos de tolerancia? La probabilidad de que un pistón fabricado por el subsidiario

3. En las tablas no figura la integral como en la (1.9), sino en la forma $\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt/\sqrt{2\pi}$. Por ello es necesario hacer previamente el cambio de variable $t = (\overline{X}-x)/\sigma$ y calcular la (1.9) como diferencia entre valores tabulados para los límites en cuestión.

tenga su diámetro en el intervalo requerido ($\overline{X} \pm \sigma/2$) es, según tablas, del 40%. O sea, por 1.000 pistones "buenos" vienen 1.500 "malos". Para seleccionar 1.000 pistones, la fábrica debe encargar entonces 2.500.

Otra consecuencia, muy importante en la práctica, es la siguiente. Al realizar una serie de mediciones de una magnitud dada, es posible que en algunos casos aislados se cometa un error *no casual* (o sea, no-gaussiano), originado por un factor extraño (error de cálculo, mal funcionamiento del aparato de medición, equivocación personal, etc.). La distribución de Gauss nos permite utilizar un criterio físico para rechazar un dato sospechoso. Supongamos haber hecho 100 mediciones de una magnitud, con un valor medio $\overline{X}$ y una dispersión estándar σ de cada dato. Supongamos que entre los 100 datos haya tres que difieran del valor medio en más de 3σ, por ejemplo. De acuerdo con la función de Gauss, la probabilidad de que un dato caiga fuera del intervalo $\overline{X} \pm 3\sigma$ es:

$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\overline{X}-3\sigma}^{\overline{X}+3\sigma} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = 0{,}0028 \quad (=0{,}28\%)$$

O sea que sólo entre 1.000 datos podría esperarse que haya 3 fuera de ese intervalo. El hecho de que los tres aparezcan entre un número 10 veces menor de datos es un indicio de que esas tres mediciones particulares padecen de un defecto "extra-gaussiano": deben rechazarse. De esta manera podemos fijar para cada serie de mediciones un "límite de confidencia". Cualquier dato cuyo valor caiga fuera del intervalo dado por el límite de confidencia debe ser rechazado. Por supuesto que para determinar el límite de confidencia no puede darse un criterio unívoco; ese límite dependerá además del número total de mediciones N. Una receta razonable es la de fijar el límite de confidencia κ en forma tal de que la probabilidad "gaussiana" para un dato de caer fuera de $\overline{X} \pm \kappa$ sea mucho menor que $1/N$ (probabilidad para *un* dato). O sea:

$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\overline{X}-\kappa}^{\overline{X}+\kappa} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx \ll \frac{1}{N} \quad \text{(por ejemplo, } = 1/10N\text{)}$$

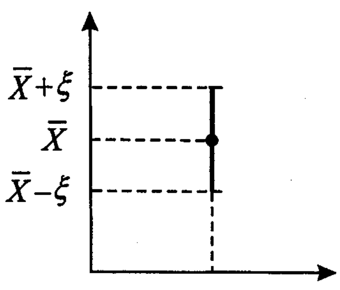
Obsérvese finalmente que, para la predicción de probabilidades a partir de una serie dada de mediciones, no es necesario que el suceso que queramos predecir haya ocurrido *realmente* en la serie en cuestión. Por ejemplo, en el caso de los pistones, es posible predecir la probabilidad de que aparezca un pistón de, digamos, más de 100,07 mm de diámetro, aunque en la remesa de prueba de 100 ejemplares no hubiese habido *ninguno* de esas características.

Cuando tenemos varias (M) series de N mediciones, con sus promedios parciales, $\overline{X}^k$, se comprueba experimentalmente que estos M promedios también se distribuyen "gaussianamente" alrededor del promedio total $\overline{\overline{X}}$. O sea, su distribución es a su vez una curva de Gauss en la que la dispersión cuadrática del promedio ξ (1.5) es el parámetro que fija sus puntos de inflexión. La interpretación de ξ como uno de los parámetros de

esa curva de Gauss nos dice que el 68% de los promedios parciales estarán entre $\overline{\overline{X}}-\xi$ y $\overline{\overline{X}}+\xi$.

El significado de la relación (1.5) resalta ahora con toda claridad: cuando hacemos una sola serie de N mediciones, obteniendo un promedio $\overline{X}$, sabemos *a priori* que ese promedio, y todos los promedios de otras series de N mediciones, pertenecerán a una distribución de Gauss alrededor del "verdadero valor". Sin necesidad de determinar esta distribución experimentalmente, podemos predecir que su dispersión cuadrática será del orden de $\sigma/\sqrt{N}$. Por cierto que no podemos predecir el "verdadero valor" de la magnitud medida. Pero podemos interpretar el error estándar del promedio ξ como aquel valor que determina el intervalo alrededor del promedio, $\overline{X}\pm\xi$, dentro del cual el "verdadero valor" de la magnitud estará comprendido con una probabilidad del 68%. Obsérvese que la probabilidad de que el verdadero valor esté *fuera* de ese intervalo es apreciable: 32%. Pero ya hemos visto que esa probabilidad cae rápidamente al aumentar el intervalo. Para un intervalo $\overline{X}\pm 4\xi$ ¡la probabilidad de que el "verdadero valor" esté fuera del mismo es de sólo 6.10^{-5}%!

La cantidad 0,6456 $\xi \cong$ 2/3 ξ representará, de acuerdo con lo visto más arriba, el error más probable del promedio. Nos fija el intervalo $\overline{X}\pm 2/3\xi$ dentro del cual el verdadero valor estará con una probabilidad del 50%.



Cuando en algún momento hay que hacer intervenir en un gráfico el resultado de una medición, se representa con un punto su valor medio, y se indica con un segmento el intervalo que va de $\overline{X}-\xi$ hasta $\overline{X}+\xi$. Esto permite visualizar gráficamente la influencia de la fluctuación: con un 68% de probabilidad, el verdadero estará dentro del segmento, y con un 32%, fuera de él; con un 4,6%, distará más de dos veces el segmento; con un 0,3%, distará más de tres veces, etc. Esto ayuda considerablemente cuando hay que ajustar curvas de forma predeterminada por puntos experimentales representados con su error en la forma indicada.

Aquí aparece otra cuestión muy importante en física experimental. Supongamos que hemos medido dos magnitudes de la misma clase. ¿Cuándo podemos afirmar que son iguales? Evidentemente nunca van a ser iguales los valores medios correspondientes $\overline{X}$ y $\overline{X}'$, aunque realmente fueran iguales las magnitudes. Sean ξ y ξ' los errores de esos promedios. Según lo dicho arriba, es evidente que si $\left|\overline{X}-\overline{X}'\right| >> \left|\xi+\xi'\right|$, es muy poco probable que los verdaderos valores de x y x' sean iguales (pues sería una tremenda casualidad que en ambas series los valores medios hayan caído lejos del verdadero valor). En cambio si $\left|\overline{X}-\overline{X}'\right| \le \left|\xi+\xi'\right|$ hay buena chance de que los verdaderos valores de ambas magnitudes sean realmente iguales. Esta probabilidad se puede calcular exactamente, en

función de $\overline{X} - \overline{X}'$, ξ y ξ'. No lo haremos aquí; simplemente diremos que un criterio razonable es ver si ambos promedios coinciden dentro del intervalo dado por sus errores.

No en todos los procesos de medición los datos se distribuyen de acuerdo con una curva de Gauss. Muchas veces, errores sistemáticos u otras condiciones físicas "distorsionan" la distribución de Gauss, sea haciendo aparecer muchos más datos de un lado del promedio que del otro (distribución asimétrica), o introduciendo "cortes" en sus extremos. La forma cualitativa más simple para verificar si una distribución dada de datos es gaussiana es comparar el histograma obtenido con la curva de Gauss teórica correspondiente.

Para ello, veamos brevemente cómo se procede para trazar una curva de Gauss por el histograma de una serie de datos experimentales. Ante todo, es conveniente elegir bien el intervalo Δx. Debe ser pequeño, pero no demasiado, pues si no caerán muy pocos datos en cada uno. Ello requiere un poco de experiencia y tanteo. Una vez elegido Δx, se representa el histograma. De los valores calculados $\overline{X}$ y σ, y del valor de N y Δx (en las unidades del dibujo) se calcula numéricamente (1.7):

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \Delta x \quad (x \text{ es la coordenada de cada intervalo } \Delta x)$$

y se lo representa gráficamente. Si la distribución es gaussiana, la curva pasará más o menos bien por el histograma. Cuanto mayor sea N, tanto mejor será el acuerdo.

Todo esto vale sólo si todos los intervalos Δx son iguales entre sí. Si no lo son (cosa que suele hacerse cuando hay poca estadística), es necesario representar el histograma de los valores de $\Delta n/\Delta x$, o sea de la densidad de datos. En otras palabras, sobre cada intervalo Δx (ahora desiguales entre sí) se representa el valor de Δn dividido por Δx. Luego se traza la curva dada por (1.8):

$$\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\overline{X}-x)^2}{2\sigma^2}}$$

que se puede comparar con el histograma.

Resumamos finalmente los pasos que deben darse para medir una magnitud dada:

1. Mídase N veces la magnitud, obteniendo los valores $x_1 \ldots x_i \ldots x_N$ expresados en sus cifras significativas (determinadas por el instrumento de medición).

2. Calcúlese el promedio aritmético.

3. Calcúlese el error estándar de cada dato: $\sigma = \sqrt{\sum (\overline{X} - x_i)^2 / N}$ (para N pequeño (digamos <20) dividir por $N - 1$).

4. Fíjese un límite de confidencia κ (de tal manera que la probabilidad gaussiana de tener un dato fuera del intervalo $\overline{X} \pm \kappa$ sea mucho menor que $1/N$).

5. Rechácese todos los datos que estuvieren fuera del intervalo y con los que quedan, calcúlense los valores de $\overline{X}$ y σ corregidos.

6. Calcúlese el error estándar del promedio $\xi = \sigma/\sqrt{N}$.

7. Escríbase el resultado en la forma $\overline{X} \pm \xi$ interpretándolo correctamente en la forma:

   a) el valor más probable de la magnitud medida es $\overline{X}$,
   b) la probabilidad de que el verdadero valor esté en el intervalo $\overline{X} \pm \xi$ es del 68% (o sea, estará afuera con un 32% de probabilidad).

A veces será necesario un paso adicional intermedio:

3'. Compárese el histograma de distribución de datos con la curva de Gauss correspondiente, para determinar si la distribución es gaussiana (si los errores son casuales).

Para terminar, hagamos una observación importante. En muchos casos de mediciones, es la cantidad misma que se mide la que sufre fluctuaciones intrínsecas. En este caso no podemos llamar a σ y ξ "errores". Son desviaciones o fluctuaciones "genuinas". Por ejemplo, si quisiéramos medir la longitud de un objeto, con una precisión de 10^{-6} cm, nos encontraríamos con que la magnitud en cuestión fluctúa intrínsecamente. Ello se debe a que con esta precisión ya entramos dentro del dominio de los movimientos térmicos de las moléculas, que es un movimiento "al azar". O si se considera las estaturas de un grupo de personas (por ejemplo, de los alumnos de un curso), tenemos una magnitud, cuyo valor está determinado con arbitraria precisión, pero que fluctúa de caso en caso. El valor σ ó ξ de una distribución de estaturas de un grupo de personas nuevamente no representa un "error", sino una dispersión o fluctuación genuina. La distribución correspondiente es gaussiana, dentro de ciertos límites.

En este último caso, es muy importante notar que el promedio no representa "el valor de algo", sino que es un parámetro que depende de la edad y de la raza del grupo de personas. σ representa el orden de magnitud con que las estaturas fluctúan alrededor del valor medio y también será característica de la edad y raza del grupo. La curva de Gauss correspondiente servirá para predecir las probabilidades para que una persona elegida al azar tenga su estatura comprendida en un intervalo dado. En este caso, ξ no tendría ningún significado físico.

En el otro caso, en el que la dispersión de datos se debe exclusivamente a errores de medición, el promedio representa el valor más probable de algo real y único, que es el "verdadero valor" de la magnitud que estamos midiendo. ξ da información sobre el grado de conocimiento de esa magnitud.

d) Relaciones entre magnitudes físicas: cuadrados mínimos y regresión lineal

Con saber medir una magnitud física dada y valorar el resultado de la medición desde el punto de vista de su significado estadístico, no está terminado el asunto. Esto sólo es el primer paso. La "física en serio" comienza cuando se estudia la *interdependencia causal* entre dos o más magnitudes físicas entre sí. En otras palabras, para establecer leyes físicas con las cuales se pueda predecir la evolución de un sistema dado es necesario previamente descubrir experimentalmente el tipo de relación que hay entre los valores numéricos de las magnitudes intervinientes y representar esta dependencia matemáticamente.

Como en la práctica estos valores numéricos están todos afectados de errores de medición o fluctuaciones intrínsecas, es necesario aplicar un algoritmo que permita determinar algo así como "la relación más probable" entre dos magnitudes físicas, vinculadas causalmente por un mecanismo físico.

Comencemos por el caso más simple: supongamos que dos magnitudes x e y estén vinculadas linealmente (por ejemplo, la longitud de un resorte y la fuerza aplicada, la presión en un punto de un líquido y la distancia a la superficie):

$$y = ax + b$$

Sea el problema determinar los coeficientes a y b experimentalmente, a partir de la medición de x e y. Si no hubiera error en las mediciones de x e y, bastaría hacer dos pares de mediciones x_1, y_1 y x_2, y_2, y resolver el sistema:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{aligned}$$

Desgraciadamente, ello nunca ocurre en la práctica. Debemos partir de una serie de pares de valores correspondientes $(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$ los cuales, debido a sus errores, nunca satisfacen exactamente una única relación $y = ax + b$. En otras palabras, las diferencias $y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$ nunca serán cero; los valores de ε_i serán positivos y negativos. Procedamos como en el caso de una sola variable. La suma de los cuadrados $\sum \varepsilon_i^2$ nos dará una cierta idea de las fluctuaciones (ahora combinadas) de x_i, y_i. Evidentemente, esa suma depende de los coeficientes a y b en la forma:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon_i^2 &= \sum (y_i - ax_i - b)^2 = \\ &= a^2 \sum x_i^2 + b^2 N - 2a \sum x_i y_i - 2b \sum y_i - 2ab \sum x_i + \sum y_i^2 \end{aligned}$$

Esto es una función cuadrática de a y b que pasa por un mínimo para un dado par de valores a y b. Podemos aplicar el criterio conocido de elegir como valores más probables de a y b aquellos que hacen mínima a $\sum \varepsilon_i^2$. O sea, a y b serán soluciones del sistema (condición de extremo):

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial b} = 0$$

Por lo tanto:

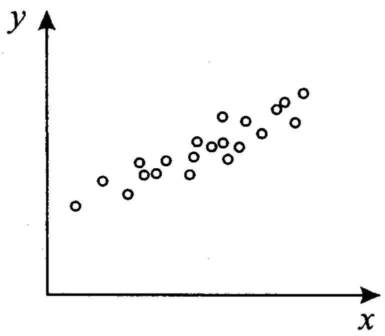
$$\begin{aligned} 2a\sum x_i^2 - 2\sum x_i y_i + 2b\sum x_i &= 0 \\ 2Nb - 2\sum y_i + 2a\sum x_i &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

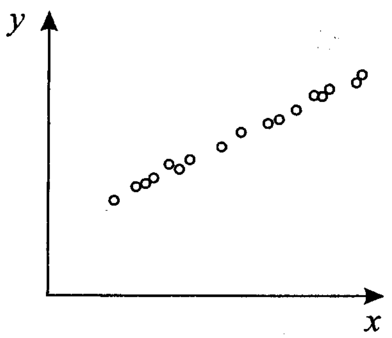
$$\begin{aligned} a &= \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \\ b &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\overline{X^2}\,\overline{Y} - \overline{X}\,\overline{XY}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Para llegar a las segundas igualdades hemos tenido en cuenta la definición de los promedios $\overline{X} = \sum x_i / N$, $\overline{Y} = \sum y_i / N$, $\overline{X^2} = \sum x_i^2 / N$ y $\overline{XY} = \sum x_i y_i / N$. Cada uno de estos valores *a*, *b* tiene a su vez un error. Para ello hay expresiones algo complicadas que pueden consultarse en los libros.

Veamos algo sobre la interpretación gráfica del método de cuadrados mínimos. Representemos en el plano (*x*, *y*) los pares de valores medidos $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n$. Si éstos obedecen a una relación lineal, y si carecen de errores, los puntos x_i, y_i caerán exactamente sobre una recta de pendiente *a* y de ordenada origen *b*. Pero, debido a las fluctuaciones casuales en las mediciones de *x* e *y*, los puntos formarán una "nube" que se condensará tanto más en las vecindades de una recta cuanto menores sean las fluctuaciones (ver figura):

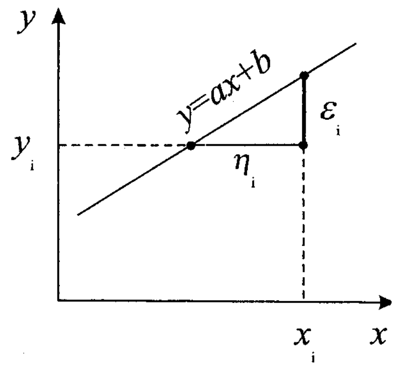


mucha fluctuación



poca fluctuación

Los coeficientes a y b determinados por el método de los cuadrados mínimos son los parámetros de una recta para la cual $\sum \varepsilon_i^2$ es mínimo. Pero obsérvese en el plano (x, y) que $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$ es precisamente la distancia vertical del punto experimental i a la recta $y = ax + b$. La recta por cuadrados mínimos es entonces aquella para la cual la suma de las distancias verticales (en realidad sus cuadrados) es mínima. Obsérvese además que pasa por el punto $\overline{X}, \overline{Y}$ definido por los promedios de los valores experimentales (basta verificar que el par $\overline{X}, \overline{Y}$ satisface la ecuación de la recta, teniendo en cuenta las (1.11)). Todo esto permite, con un poco de experiencia, trazar "a ojo" la recta por cuadrados mínimos y determinar gráficamente los coeficientes de la relación lineal. Muchas veces esto es suficiente en la práctica.



Obsérvese finalmente que el método de cuadrados mínimos puede aplicarse a relaciones no lineales, como, por ejemplo:

$$y = bx^a \quad y = be^{ax} \qquad\qquad y = \frac{a}{b+x}$$

Bastará para ello transformar cada una en una relación lineal. En el caso de estos ejemplos, ello se consigue tomando logaritmos de la siguiente manera:

$$\ln y = \ln b + a \ln x \qquad\qquad \ln y = \ln b + ax \qquad\qquad \frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$$

Ahora se pueden tratar los pares de valores ln y, ln x; ln y, x; $1/y$, x, respectivamente, como datos en una relación lineal, a los que se pueden aplicar directamente las fórmulas (1.11).

Para la derivación de la recta por cuadrados mínimos hemos escrito la relación entre las variables experimentales en la forma $y = ax + b$, y hemos elegido las distancias verticales ε_i para la condición de mínimo. Pero nada nos impide contemplar la relación inversa $x = x(y)$ y repetir los pasos anteriores uno por uno. Tendríamos, en principio:

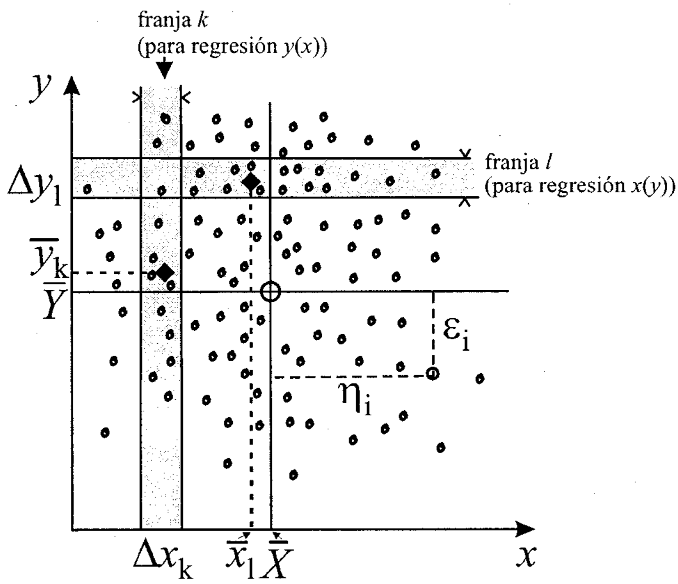
$$x = a^* y + b^* \quad \text{donde} \quad a^* = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad b^* = -\frac{b}{a} \qquad (1.12)$$

Ahora serán las diferencias $\eta_i = x_i - a^* y_i - b^*$ cuya suma de cuadrados habrá que minimizar (nótese que las η_i son las distancias *horizontales* en la figura). Obtenemos el par de relaciones

$$a^* = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2}$$

$$b^* = \frac{\sum y_i^2 \sum x_i - \sum y_i \sum x_i y_i}{N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2} = \frac{\overline{Y^2}\,\overline{X} - \overline{Y}\,\overline{XY}}{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2} \qquad (1.13)$$

formalmente idéntico al de (1.11), en el cual simplemente se han intercambiado las *x* con las *y*, así como $\overline{X}$ con $\overline{Y}$. Lo sorprendente es que en general ¡la recta de cuadrados mínimos así obtenida *no coincide* con la anterior! Si bien también pasa por el punto de los promedios $\overline{X}, \overline{Y}$, su pendiente será diferente. En otras palabras, los coeficientes a^* y b^* calculados según las (1.13) *no* satisfacen las relaciones (1.12). ¿Qué está pasando?



Es fácil ver que las dos rectas de cuadrados mínimos no tienen por qué coincidir. Para ello consideremos el caso extremo de una serie de datos correspondientes a dos magnitudes físicas *x*, *y* que *no están correlacionadas* en absoluto, o que están sujetas a errores de medición o fluctuaciones intrínsecas muy grandes. En ese caso, graficando los pares de valores obtenidos x_i, y_i, se obtendría una nube de puntos como en la figura. Es fácil comprobar "a ojo" que para una recta horizontal que pasa por el punto de valores medios $\overline{X}, \overline{Y}$ se minimiza la suma de cuadrados de distancias verticales ε_i, y que una recta vertical por $\overline{X}, \overline{Y}$ minimiza la suma cuadrática de distancias horizontales η_i. En este caso, evidentemente, a = 0 y a* = 0, y las (1.12) no se cumplen. Por otro lado, en el otro extremo de una correlación perfecta sin errores de medición, la nube de puntos estará perfectamente alineada (ver figura derecha, página 33), y las dos rectas coincidirán, satisfaciéndose las relaciones (1.12). Para un caso normal intermedio, es un buen ejercicio tratar de determinar las dos rectas, llamadas *rectas de regresión*, a ojo. Para ello se divide el plano *x*, *y* en franjas verticales y para cada una (p. ej., franja *k* en la figura), se estima el valor medio $\overline{y_k}$ de los valores de *y* de los puntos que caen dentro de ella, marcándolo con un punto distintivo (ver figura). Con este procedimiento se reduce el número total de puntos a unos pocos, a través de los cuales se puede trazar a ojo una recta, que además debe pasar por el punto de promedios totales $\overline{X}, \overline{Y}$. Ésta será la recta de regresión de "*y* sobre *x*" (recta horizontal en el ejemplo de la figura). Luego se divide el plano en franjas horizontales y, para cada una de ellas (por ejemplo la franja *l*), se marca

el promedio $\overline{x_l}$ de los valores de x de los puntos que contiene. La recta que pasa por esos promedios será la recta de regresión de "x sobre y" (recta vertical en la figura). Cuanto mejor sea la correlación entre x e y, menor será el ángulo entre las dos rectas de regresión; para una correlación perfecta el ángulo tenderá a cero. Para variables no correlacionadas, es de 90° (caso de la figura).

Todo esto se puede precisar matemáticamente. Teniendo en cuenta las (1.11) y (1.13) es fácil verificar las siguientes igualdades:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad a^* = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (1.14)$$

donde

$$\sigma_x^2 = v_x = \frac{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{N} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_i^2 = v_y = \frac{\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}{N} = \overline{Y^2} - \overline{Y}^2 .$$

son las dispersiones cuadráticas medias de x e y, respectivamente, y el parámetro r es el *coeficiente de correlación*:

$$r = \sqrt{aa^*} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sqrt{\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)}\sqrt{\left(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2\right)}} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

(1.15)

El coeficiente de correlación r varía entre 0 y 1. En una correlación perfecta, $a = 1/a^*$, y $r = 1$; en ausencia de correlación $r = 0$. En la práctica una correlación "buena" está en general dada por $r > 0{,}9$. Si $r < 0{,}3$ se considera que las dos magnitudes x e y no están correlacionadas. La teoría estadística de mediciones da algoritmos más precisos para determinar la "bondad" de una correlación.

Nos debemos preguntar ahora: dado que hay dos rectas de regresión, ¿cuál de las dos vale para describir cuantitativamente la relación entre las dos variables x, y? En general, ello dependerá de cuál de las dos elegimos como variable independiente. Pero hay casos en que la elección no es arbitraria. El más común es aquel en que una de las variables, por ejemplo la x, tiene errores de medición relativos muy pequeños comparados con los de y. En ese caso, los distintos valores obtenidos en la medición de x que caen dentro de cada franja horizontal, como la l en la figura, se deben a variaciones genuinas de la magnitud que se está midiendo, no a fluctuaciones causadas por errores de medición. En cambio, los distintos valores de y dentro de las franjas verticales como la k se deberán a errores de medición. En este caso, le podemos "echar la culpa" de que los puntos no caigan sobre

una recta a la variable y exclusivamente, y la regresión a adoptar deberá ser la descripta por $y = y(x)$ (o sea, los coeficientes a y b dados por las (1.11)).

Observemos, para terminar, que la cantidad

$$C = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y} = \sum \left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right)$$

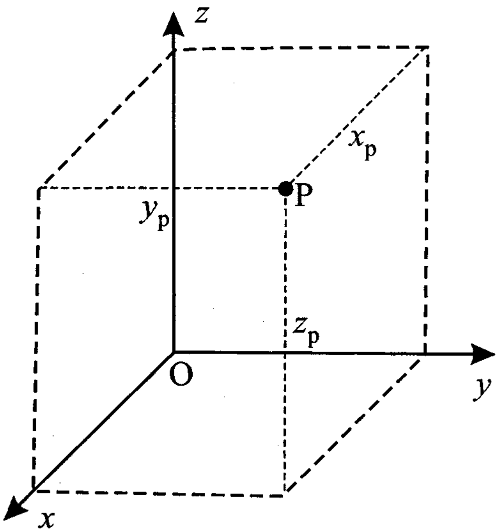
que aparece en las relaciones (1.11), (1.13) y (1.15) se llama *covarianza*; juega un papel importante en el tratamiento estadístico de datos experimentales. Puede variar entre $C = 0$ (ausencia de correlación) y $C = \sigma_x \sigma_y$ (correlación perfecta).

Capítulo 2

Cinemática del punto

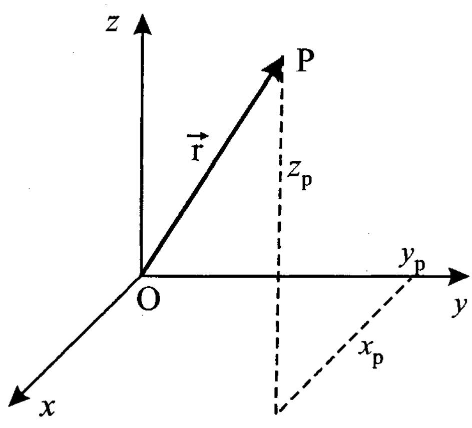
a) Vector posición

El concepto de movimiento tiene un significado relativo: se refiere a la modificación de la posición relativa de los cuerpos entre sí. Por ello, es necesario definir un *cuerpo de referencia* respecto del cual se determinan los movimientos de los demás cuerpos. Se lo idealiza en la forma de un sistema de coordenadas: una terna de ejes cartesianos ortogonales rígidos, respecto de los cuales se refieren las coordenadas de los puntos de un cuerpo cualquiera.



Dar las coordenadas de un punto *P* significa ubicar el punto unívocamente respecto del sistema de referencia: por ejemplo, dando las distancias x_p, y_p, z_p a los planos coordenados. De esta manera la posición de un punto está fijada por tres números dados, en un orden determinado. La posición está representada entonces por un ente más complicado que otras magnitudes –como, por ejemplo, la masa y la temperatura– que necesitan un solo número para ser determinadas completamente.

En física hay magnitudes para cuya descripción se necesita más información que la que puede dar un simple número: entre éstas, las magnitudes *vectoriales*. Magnitudes que se describen exhaustivamente con un solo número se llaman *escalares*. Por ejemplo, la distancia entre dos puntos es un escalar; no así la posición de un punto respecto del otro, que necesita tres números para su descripción.



La posición también la podemos representar geométricamente por un segmento dirigido que va del origen del sistema de coordenadas al punto en cuestión: **OP**. Este segmento dirigido está caracterizado por la dirección de la recta que pasa por los puntos O y P, por el sentido de esta recta de O hacia P, y por la distancia $\overline{OP}$ (longitud del segmento). Un segmento dirigido se denomina *vector*. En este caso, es el vector posición o "radio vector" **r**. La distancia OP se llama módulo del vector y se representa por $|\mathbf{r}|$, $|r|$ o simplemente *r*.

Observemos que la representación de la posición de un punto por sus coordenadas o por su vector posición es totalmente equivalente: las coordenadas son las proyecciones del radio vector sobre los ejes. Esas proyecciones se llaman *componentes* del vector. Se les asigna un signo positivo o negativo según tengan su sentido en las coordenadas crecientes o decrecientes, respectivamente. Las designaremos con (r_x, r_y, r_z) o simplemente (x, y, z).

La relación entre el módulo del vector **r** y las componentes es:

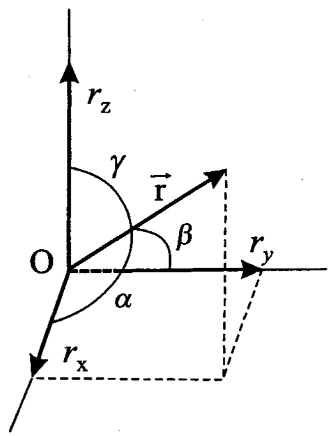
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La relación entre las componentes y la dirección y sentido del vector, determinados por los ángulos del vector con cada uno de los tres ejes (ángulos directores), es por consideraciones geométricas elementales:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Comprobamos la relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

O sea, sólo dos de los tres cosenos directores son independientes.

En resumen, el vector posición puede representarse en forma geométrica (segmento dirigido caracterizado por tres elementos: módulo y dos de los ángulos directores que dan la dirección y el sentido) o en forma algebraica (caracterizada por las tres componentes). Las dos formas son equivalentes: conociendo las tres componentes podemos pasar al módulo y dos ángulos directores y viceversa.

El vector posición es el ejemplo más simple de un vector. Para el caso general de un vector cualquiera **A**, vale lo expresado arriba: está definido *algebraicamente* por un conjunto ordenado de tres números, llamados *componentes*: (A_x, A_y, A_z); o *geométricamente* por el módulo ($|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$) y los cosenos directores $\cos\alpha = A_x/|A|$, $\cos\beta = A_y/|A|$, $\cos\gamma = A_z/|A|$ (ligados siempre por la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$). Las representaciones analítica y geométrica son dos formas equivalentes para describir un *mismo* ente, el vector.

Cualquier vector **A** se lo puede representar gráficamente mediante un segmento dirigido, tal como el vector posición, siempre y cuando se defina una escala de medida para la representación del módulo.

Los vectores son entes para los cuales se pueden definir las operaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar (número). Cada una de estas operaciones se puede definir algebraica y geométricamente. Ambas formas deben conducir siempre al mismo resultado.

Recordemos la operación *suma*:

Forma algebraica: Un vector **X** es suma de **A**, **B**, **C**, ... si sus componentes son suma de las componentes respectivas de los vectores sumandos.

Forma geométrica: Un vector **X** es suma de **A**, **B**, **C**, ... si, al llevar los segmentos dirigidos de los vectores sumandos uno a continuación del otro, se obtiene entre la punta del último y el origen del primero un segmento dirigido igual al de **X**.

La diferencia de vectores se define como una suma de un vector *opuesto*:

Forma algebraica: Un vector **B** es opuesto de **A** si sus componentes son iguales a las de **A**, cambiadas de signo.

Forma geométrica: Un vector **B** es opuesto de **A** si su segmento dirigido es de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto al de **A**.

Finalmente, el *producto* de un vector por un número se define:

Forma algebraica: Un vector **B** es el producto de **A** por un número k, si sus componentes son los productos de las componentes respectivas de **A** por el número k.

Forma geométrica: Un vector **B** es el producto de **A** por un número k, si su segmento dirigido tiene igual dirección, sentido igual/opuesto si k es positivo/negativo y módulo $|B| = k|A|$.

Conviene usar una u otra representación según el caso. Lo importante es recordar que se trata de dos descripciones diferentes de un mismo y único ente.

Una relación entre vectores tal como

$$\mathbf{A} + b\mathbf{C} - \mathbf{D} + \mathbf{E} = 0$$

es una relación simbólica que siempre indica tres relaciones homólogas entre las componentes de los vectores intervinientes. Una igualdad vectorial es una forma abreviada para representar tres igualdades correspondientes a las componentes.

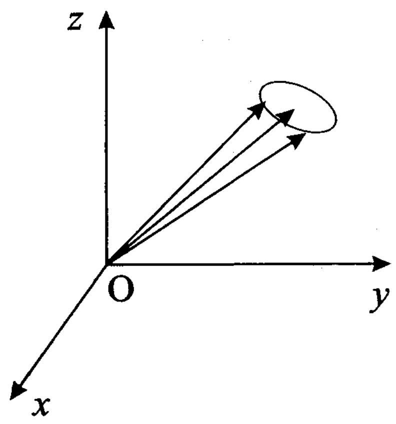
La suma y resta de vectores permite introducir el cálculo diferencial de vectores. Si un vector es función de un parámetro (el tiempo, por ejemplo), se define como *derivada* del vector respecto del parámetro a la operación:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

que se llevará a cabo analítica o geométricamente.

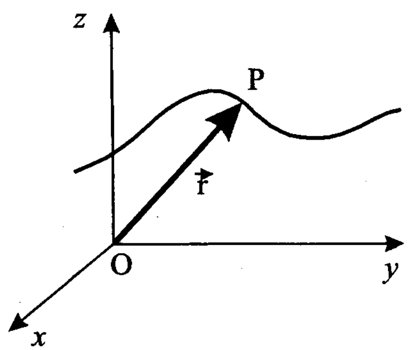
Volvamos a nuestro sistema de coordenadas. Para ubicar un cuerpo en el espacio debemos dar la posición de cada uno de sus puntos. Esto es muy complicado; para empezar debemos simplificar el problema.

Supongamos un cuerpo "chiquitito". Los vectores posición de cada uno de los puntos del cuerpo serán prácticamente de la misma dirección, del mismo sentido y del mismo módulo. Asimismo, las componentes de esos vectores diferirán entre sí en muy poco. Si el error con que podemos medir la posición de un punto en el espacio es del orden de las dimensiones del cuerpo, no tendrá sentido distinguir un punto del cuerpo de otro. Un cuerpo cuyas dimensiones son del orden del error en la medición de las distancias, o cuyas dimensiones sean muchísimo menores que las distancias involucradas, se denomina *cuerpo puntual* o punto material. La posición de un cuerpo puntual está determinada por un solo vector posición. El concepto de cuerpo puntual es relativo. Por ejemplo, la Tierra puede ser considerada como punto material en su movimiento orbital como planeta. En adelante trataremos el movimiento de puntos materiales.



El movimiento de un punto está determinado si se conoce su posición en función del tiempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$$



Como toda relación vectorial, ésta es una expresión simbólica para indicar:

$$\begin{array}{lcl} x = x(t) & & r = r(t) \\ y = y(t) & \text{o} & \alpha = \alpha(t) \\ z = z(t) & & \beta = \beta(t) \end{array}$$

($\gamma = \gamma(t)$ se deduce de la relación entre los cosenos directores). Es necesario dar entonces tres funciones del tiempo.

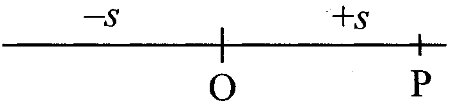
El lugar geométrico de los puntos que ocupa el cuerpo en su movimiento se llama trayectoria. Para cada valor de t tenemos un vector $\mathbf{r}$ que señala un punto P de la trayectoria. Por eso $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones de la trayectoria.

b) El concepto de velocidad en el movimiento rectilíneo

Hay movimientos en que la trayectoria está prefijada de antemano por condiciones físicas (tren, ascensor, etc.). En particular, la trayectoria puede ser una recta, la trayectoria más simple de todas. En este caso el movimiento es *rectilíneo.*

Si conocemos de antemano la trayectoria, no necesitamos tres números para describir la posición: basta dar la distancia s a un punto fijo O de la trayectoria, con tal de fijar un signo (sentido) para distinguir cuándo el móvil se encuentra de uno o del otro lado de O. Obsérvese que la asignación de un sentido (así como la elección del punto de referencia O) es *arbitraria*, pero que, una vez tomada para la descripción de un movimiento, debe ser mantenida.

El movimiento estará determinado si conocemos la función $s = s(t)$.



Sean ahora dos posiciones s_1 y s_2 del mismo punto en instantes t_1 y t_2. Introduciremos una nueva característica del movimiento: la velocidad, que surge del concepto intuitivo de "rapidez" o "lentitud" de movimiento. A un movimiento lo consideramos tanto "más rápido" cuanto más espacio recorre el punto en un intervalo de tiempo determinado y cuanto menor sea el tiempo tardado en recorrer un espacio dado. El ente representativo de la velocidad deberá ser entonces directamente proporcional al espacio recorrido e inversamente proporcional al intervalo de tiempo empleado. La forma más sencilla será definir la velocidad como:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Si la velocidad es positiva, el móvil se está moviendo en el sentido de las s crecientes; si la velocidad es negativa, lo hace en el sentido de las s decrecientes. Obsérvese que el signo particular de una velocidad dada depende meramente de la convención sobre el sentido de las s.

La velocidad así definida no sirve para mucho, pues sólo nos da una idea "promedio" del movimiento entre los instantes t_1 y t_2. Por ello se denomina a la expresión de arriba con el nombre de "velocidad media". En general, el valor del cociente $\Delta s/\Delta t$ dependerá de la duración del intervalo Δt; sólo en un movimiento *uniforme*, $\Delta s/\Delta t$ siempre tiene el mismo valor, cualquiera sea Δt (o Δs).

Pero, si hacemos tender Δt a cero, se comprueba experimentalmente que el valor de $\Delta s/\Delta t$ empieza a "independizarse" de Δt; tiende a un valor fijo, que sólo depende del instante en el cual está tomado y que se llama *velocidad instantánea* del móvil:

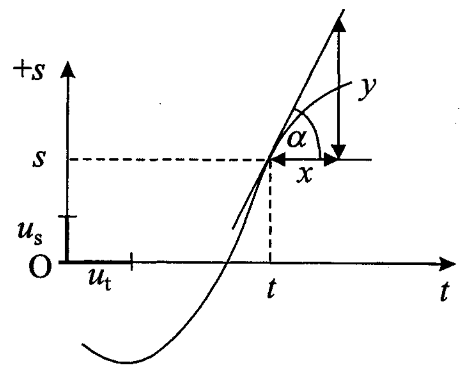
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad (2.1)$$

Obsérvese bien que la existencia de este límite es un resultado *experimental* que indica que para cualquier movimiento, por complicado que éste sea, siempre existen intervalos de tiempo Δt suficientemente pequeños, para los cuales los valores de

los cocientes $\Delta s/\Delta t$ difieren entre sí en cantidades arbitrariamente pequeñas. Esto, por otra parte, indica que el movimiento físico es un proceso *continuo*, que no puede ocurrir "a saltos". Obsérvese finalmente que podríamos haber definido la velocidad como $\Delta s^2/\Delta t$ o $\Delta s/\sqrt{\Delta t}$, por ejemplo. Cualquiera de estos cocientes nos daría una idea más o menos correcta acerca de la "rapidez" de un movimiento. Pero ninguno de ellos tiene límite finito al tender Δt a cero (ese límite será 0 o ∞ respectivamente). La experiencia indica que es $\Delta s/\Delta t$ y ninguna otra combinación de Δs y Δt lo que tiene límite finito.[5] La velocidad es, entonces, el ente físico que representa la *existencia* del límite (2.1), o sea, la continuidad del movimiento.

Los libros definen la velocidad instantánea "por decreto" mediante la (2.1). Se suele olvidar lo más importante para la cinemática: ¡llamar la atención acerca de que es necesario verificar experimentalmente el hecho de que ese límite exista! Debe advertirse aquí que la tan frecuente definición de velocidad como "espacio recorrido en la unidad de tiempo" es conceptualmente errónea. La velocidad no es ningún "espacio", sino cierto cociente diferencial.

Analicemos el gráfico de la función $s = s(t)$.



Desde ya tiene que ser una función continua y derivable. Observemos que $v = ds/dt$ es la pendiente de la tangente a la curva en un instante t. Pero ¡cuidado con el valor numérico! Debemos tener en cuenta las escalas de los ejes. O sea, el valor de v *no* es $\operatorname{tg}\alpha = y/x$ donde x e y se miden en centímetros, sino que hay que medir x e y con las unidades utilizadas en los ejes. O sea, el valor de v será: $v = \frac{y/u_s}{x/u_t}$, donde u_s y u_t son las longitudes en *cm* de la unidad en cada eje, respectivamente.

c) Unidades y dimensiones de magnitudes derivadas

Consideremos la definición de velocidad media: $\bar{v} = \Delta s/\Delta t$. En física, una fórmula es una relación entre los números que representan los valores de las magnitudes intervinientes. Una fórmula es una expresión sintética que representa una relación algebraica entre números.

Ya hemos dicho, en el capítulo 1, a, que el valor de una magnitud física es el número real que representa cuántas veces la unidad está contenida en la magnitud en cuestión. Lo de "está contenida" está definido en cada caso por el "proceso de medición", que describe la operación que hay que realizar para comparar una magnitud con la unidad. La unidad de las llamadas *magnitudes independientes* se define por "decreto"; por ejemplo, la

5. Por supuesto, si $\Delta s/\Delta t$ tiene límite, también lo tendrá $\Delta s^n/\Delta t^n$. Pero esta última combinación no sirve, pues no cumple las condiciones de aditividad de velocidades (2.14).

unidad de longitud es la distancia entre dos marcas practicadas en la barra que representa "el metro patrón". La unidad de tiempo es el lapso representado por la 86.400ava parte del "día solar medio". Más adelante veremos que la unidad de masa es la masa de un cierto cuerpo llamado "kilogramo-masa patrón". Como se ve, en realidad no son definiciones, sino convenciones.

La velocidad es una *magnitud derivada*, que se define por medio de una operación física entre magnitudes independientes (distancia y tiempo). El valor de la velocidad es el número que se obtiene al dividir el valor de una distancia recorrida por el valor del tiempo empleado. La unidad de velocidad es la de aquel móvil (con movimiento uniforme) que recorre la unidad de espacio en la unidad de tiempo.

Es evidente que el número que representa el valor de una velocidad cambiará si cambiamos las unidades de longitud y tiempo, aun siendo la velocidad que representa siempre la misma. Efectivamente, si L y T son las unidades originales de longitud y tiempo, y L' y T' las nuevas, y si λ y τ son los valores numéricos de las unidades L y T medidos con el nuevo sistema de unidades, el nuevo valor numérico de la velocidad en cuestión será según (1.1):

$$v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'} = \frac{\Delta s \lambda}{\Delta t \tau} = v \frac{\lambda}{\tau} \qquad (2.2)$$

donde v es el valor de esa misma velocidad con el sistema de unidades anterior.

Ésta es una relación entre números, y nos da la regla de transformación que sufre el número que representa el valor de la velocidad cuando se cambian las unidades. Para recordarla se utiliza universalmente la convención de añadir la relación simbólica entre las unidades utilizadas; por ejemplo 3 "m/seg". Esta relación simbólica se denomina "dimensiones de la velocidad" y se suele indicar en forma genérica:

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = [L][T]^{-1}$$

La expresión "3 m/seg" quiere decir dos cosas:

a) el valor de la velocidad es 3 cuando se utiliza el metro y el segundo como unidades;

b) si se cambian las unidades, a ese número 3 hay que multiplicarlo por el valor del metro en el nuevo sistema, y dividirlo por el valor del segundo en el nuevo sistema.

En resumen, "m/seg" es una expresión simbólica que representa una regla de transformación.

Por ejemplo, si las nuevas unidades son el Km y la hora, tenemos:

$$\lambda = 10^{-3}, \qquad \tau = 1/3.600$$

Si el valor de una velocidad era 3 (m/seg), con el nuevo sistema de unidades **será**, según (2.2),

$$3 \text{ x } \frac{10^{-3}}{1/3.600} = 10{,}8$$

o sea 10,8 "Km/h". La igualdad 3 m/seg = 10,8 Km/h es simbólica; físicamente significa que el valor "3" y el valor "10,8" corresponden a una misma velocidad, si las unidades son m y seg, y Km y hora, respectivamente.

Debido a la relación que define la velocidad $v = \Delta s/\Delta t$ es posible elegir como magnitudes independientes cualquier par interviniente, por ejemplo, la velocidad y el espacio. En este caso, el tiempo pasará a ser unidad derivada, debiendo ser definida su unidad como aquel intervalo que tarda un móvil en recorrer la unidad de espacio con la velocidad (constante) unidad. En física moderna, por ejemplo, se suele usar la velocidad de la luz como unidad independiente; en aerodinámica, la velocidad del sonido en aire a temperatura normal.

d) Aceleración en el movimiento rectilíneo

Tal como introdujimos la velocidad, podemos introducir ahora la caracterización de la variación de velocidad. El ente correspondiente lo llamamos aceleración media:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración *instantánea* será:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (2.3)$$

Lo importante es que se comprueba *experimentalmente* que este límite existe. Físicamente significa que tampoco la velocidad puede "saltar" de un valor a otro sin pasar por los valores intermedios. La función $s(t)$ debe ser derivable dos veces.

Obsérvese que cuando la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad significa que ésta va en aumento (en valor absoluto); si, en cambio, la aceleración y la velocidad tienen signo opuesto, significa que el valor absoluto de la velocidad disminuye. En el último caso se trata de un movimiento *decelerado*. Obsérvese bien que lo que importa para tener un movimiento decelerado o acelerado no es el signo de la aceleración aisladamente (como es presentado en los malos libros), sino el hecho de que aceleración y velocidad tengan signos opuestos o iguales, respectivamente. Un movimiento con aceleración positiva pero velocidad negativa es decelerado. Es fácil comprender esto si se recuerda que el signo de la velocidad, o de la aceleración, depende meramente de la convención (arbitraria) sobre el sentido elegido para el eje s.

Como el hecho de que un movimiento sea acelerado o decelerado es un hecho físico comprobable experimentalmente en forma totalmente independiente de toda convención

sobre un sentido en el eje de movimiento, no puede intervenir en esto el signo de la aceleración (o de la velocidad) en forma aislada. Esta independencia del comportamiento físico de un sistema de todas las convenciones particulares que necesariamente deben introducirse en la descripción matemática (como ser el sentido en un eje, los puntos de referencia, los sistemas de coordenadas y las unidades de las magnitudes independientes) lleva el nombre genérico de "covariancia". En otras palabras, la descripción de la física es "covariante", o sea, los resultados físicos descriptos o predichos por leyes físicas son independientes de todas las convenciones introducidas por el hombre en su descripción.

Respecto de las dimensiones de la aceleración, de acuerdo con la definición $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$, tenemos:

$$[a] = \frac{[L]}{[T]^2} = [L][T]^{-2}$$

(por ejemplo "cm/seg^2" o "cm.seg^{-2}").

Recuérdese siempre que esto *no* significa "centímetro dividido segundos al cuadrado", sino que es un símbolo que indica:

a) las longitudes están medidas en centímetros y los tiempos en segundos;
b) cuando se cambian las unidades independientes, el valor numérico de la aceleración debe multiplicarse por el número que se obtiene reemplazando el símbolo "cm" por su valor numérico en el nuevo sistema, y el símbolo "seg^2" por el cuadrado del valor del segundo en el nuevo sistema, o sea, por $\lambda \tau^{-2}$. λ y τ son siempre los valores numéricos de las "viejas" unidades en términos del nuevo sistema.

Veamos un ejemplo: si la aceleración de los cuerpos en su caída libre es de 980 cm/seg^2, y queremos pasar al sistema metro y minuto, al valor 980 hay que multiplicarlo por: $\lambda \tau^{-2} = 10^{-2}\,(1/60)^{-2} = 36$; la aceleración será entonces 980 cm/seg^2 = 980 x 36 m/min^2 = = 35.280 m/min^2.

Es importante tener idea acerca de los órdenes de magnitud. En el caso de la velocidad es fácil; basta pasar a Km/h, que es la unidad de velocidad más familiar para nosotros (conocemos intuitivamente la diferencia entre 10 Km/h y 100 Km/h).

Veamos, por ejemplo, si una velocidad de 3 micrones por microsegundos es "mucho" o "poco". 1 micrón es 10^{-4} cm = 10^{-6} m = 10^{-9} Km; 1 microsegundo es 10^{-6} seg = = 10^{-6} /3.600 horas. Por lo tanto:

$$1\frac{\mu\text{m}}{\mu\text{seg}} = 1\frac{10^{-9}}{10^{-6}/3.600} = 10{,}8 \text{ Km/h}$$

o sea, la velocidad de un hombre que corre moderadamente.

En el caso de aceleración no tenemos una noción tan familiar del orden de magnitud. Una aceleración prototipo es la de la caída de los cuerpos. Pero es una aceleración "muy grande" comparada con las aceleraciones de un automóvil, avión, etc. Por ejemplo, un

avión típico tarda, desde el reposo hasta llegar a 150 Km/h, unos 30 segundos. La aceleración media es entonces:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad\qquad \Delta v = 150\ \text{km/h} = 150\frac{10^5}{3.600}\ \text{cm/seg}$$

$$\bar{a} = 150\frac{10^5}{3.600}\frac{1}{30}\ \text{cm/seg} = 139\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \cong \frac{1}{7}\ g \qquad (g\text{: aceleración de la gravedad})$$

Otro ejemplo: tomemos una aceleración de 1 μm/μseg^2. Hemos visto que 1 μm/μseg es una velocidad "razonable"; ¿será esta aceleración "razonable"?

$$1\ \mu\text{m}/\mu\text{seg}^2 = 1\ \frac{10^{-4}}{(10^{-6})^2} = 10^8\ \text{cm/seg}^2 \cong 10^5\ \text{g} \quad (!)$$

No existe en la práctica una aceleración tan enorme. ¿Cómo se explica intuitivamente que siendo 1 μm/μseg una velocidad "pequeña", sea 1 μm/μseg^2 una aceleración tan enorme? Ello se debe a que en una aceleración de 1 μm/μseg^2 la velocidad aumenta en 1 μm/μseg (= 10,8 Km/h) en tan sólo 1 μseg (intervalo pequeñísimo).

Hemos derivado la función $s(t)$ con respecto al tiempo, obteniendo la velocidad instantánea de un móvil con movimiento rectilíneo. Derivando la función $s(t)$ dos veces obtuvimos la aceleración instantánea. Así podríamos continuar *ad infinitum*:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}\ , \quad \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d^4s}{dt^4}\ , \ldots$$

¿Por qué no lo hacemos? En primer lugar por economía; veremos en dinámica que las derivadas de la aceleración no juegan ningún papel físico, ya que es la aceleración la que viene dada por las fuerzas (causa física de todo cambio de movimiento). Pero hay otra razón poderosa que en general se olvida: la aceleración sí puede variar bruscamente; no hay restricciones de continuidad para ella, tal como las había para s y v; por lo tanto no siempre existen las derivadas de la aceleración. En otras palabras, la *experiencia* muestra que el límite del cociente $\Delta a/\Delta t$ puede no existir.

En resumen: 1°) un móvil no puede "saltar" de un punto s_1 a otro s_2 sin pasar por todos los puntos intermedios; 2°) un móvil no puede pasar "de golpe" de una velocidad v_1 a otra v_2 sin pasar por valores intermedios (los choques requieren una discusión aparte); 3°) un móvil sí puede pasar bruscamente de una aceleración a_1 a otra a_2, sin pasar por aceleraciones intermedias. Por ejemplo, un móvil puede partir repentinamente del reposo con una aceleración $a \neq 0$ sin haber sufrido aceleraciones intermedias.

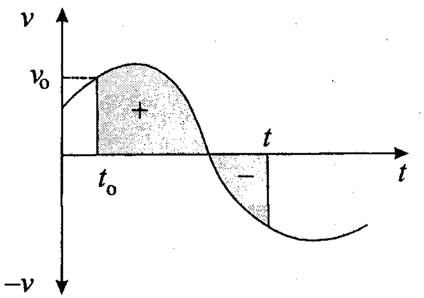
e) Integración de las ecuaciones de movimiento rectilíneo

Sea un movimiento rectilíneo. Supongamos que tenemos prescripta la función $v = v(t)$ (por ejemplo, un automovilista, un capitán de barco, o un piloto en un vuelo a ciegas, que van manteniendo una velocidad dada en función del tiempo). Si queremos encontrar el movimiento $s(t)$ debemos considerar:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \quad \therefore \quad \int ds = \int v(t)\, dt$$

Las integrales deben realizarse entre los límites correspondientes:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$



(ponemos t' en la variable de integración para no confundirla con el límite superior t). Entonces:

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$

Para determinar $s(t)$ es necesario conocer la posición s_0 en el instante inicial t_0 (condición inicial).

Consideremos el gráfico $v = v(t)$. El área sombreada nos da el espacio recorrido $s - s_0$ entre t_0 y t. ¡Ojo con la escala: sólo el valor del área medida con las unidades de los ejes da el valor de $s - s_0$!

Para el caso particular $v =$ cte. (movimiento rectilíneo uniforme) tenemos:

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0)$$

que representa la expresión integral del movimiento uniforme. La aceleración del movimiento uniforme rectilíneo es:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

para todo t (expresión diferencial del movimiento uniforme).

Supongamos ahora la función $v = v(s)$, o sea la velocidad prescripta en función del espacio (por ejemplo, en los ferrocarriles de montaña, donde la velocidad está prescripta de acuerdo con la configuración del terreno).

Tenemos:

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \therefore \quad \frac{ds}{v(s)} = dt$$

Integrando entre límites correspondientes:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{v(s')} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$$

La primera integral es una cierta función de s. Obtenemos aquí la función $t = t(s)$. Hay que despejar entonces s como función inversa.

Supongamos ahora como dato la aceleración (caso más importante; ya dijimos que las fuerzas exteriores determinan precisamente la aceleración de un cuerpo). Sea dada la función $a = a(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \quad \therefore \quad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\, dt' \qquad (2.4a)$$

Introduciendo esta función $v(t)$ en la expresión de $s(t)$ tenemos:

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t'')\, dt'' \qquad (2.4b)$$

Las condiciones iniciales son v_0 y s_0; no se puede resolver el problema mecánico sin conocer la posición y velocidad inicial del punto; dados v_0 y s_0, y dada la función $a(t)$, el movimiento queda determinado para todo tiempo t.

Si por alguna razón no pudiéramos conocer v_0 y s_0 con exactitud sino sólo aproximadamente, el movimiento futuro no estaría determinado exactamente, y sólo podríamos hablar de la *probabilidad* de hallar el punto en una región dada, para un intervalo de tiempo dado.

En la física cuántica, que describe el dominio atómico, es por un principio de la naturaleza imposible determinar con precisión simultáneamente la posición y la velocidad de un cuerpo (ver pág. 18); por lo tanto, la mecánica cuántica sólo puede describir el movimiento de sistemas atómicos probabilísticamente. Es imposible predecir con certeza la posición de un electrón en un átomo o de un protón en un núcleo, y sólo podemos hablar de la probabilidad de hallarlos en una cierta región del espacio, en un instante dado.

Sea finalmente el caso en que la función dato es $a = a(s)$:

$$a(s) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dv}{ds}v = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

obtenemos:

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = a(s)\,ds$$

Integrando entre límites correspondientes:

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0{}^2\right) = \int_{s_0}^{s} a(s')\,ds'$$

Observemos que aparece v^2; o sea, no obtenemos información directa sobre el signo de v. Esta dificultad la discutiremos más adelante.

Consideremos dos ejemplos; uno para movimiento uniforme y otro para movimiento uniformemente acelerado.

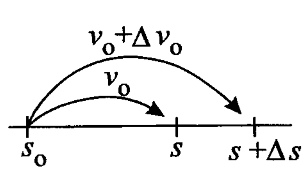
En el primer ejemplo trataremos el caso de un conjunto de N partículas que en el instante $t_0 = 0$ parten simultáneamente de un punto dado s_0, con una distribución gaussiana de velocidades iniciales, caracterizada con una velocidad media $\overline{v_0}$ y una dispersión σ_v (por ejemplo, los electrones emitidos por un filamento que se calienta instantáneamente a alta temperatura). O sea, según la (1.7) habrá

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left(\overline{v_0} - v_0\right)^2}{2\sigma_v{}^2}}\,\Delta v_0$$

partículas con su velocidad inicial comprendida entre v_0 y $v_0 + \Delta v_0$ (esta distribución se llama "espectro de velocidades").

Como en este caso $a = 0$, la ecuación de movimiento para una de las partículas es, según las (2.4)

$$s = s_0 + v_0 t$$



Veamos cuántas partículas habrá en el instante t (> 0) en un intervalo de espacio entre s y $s + \Delta s$. Para que una partícula pueda estar en el punto s al tiempo t, debe haber tenido una velocidad inicial $v_0 = (s - s_0)/t$; en cambio, para estar en el otro extremo del intervalo, $s + \Delta s$, su velocidad inicial deberá haber sido $v'_0 = \left(s + \Delta s - s_0\right)/t = v_0 + \Delta s/t = v_0 + \Delta v_0$ (hemos llamado $\Delta v_0 = \Delta s/t$). Es evidente que en el instante t estarán entonces en el intervalo en cuestión todas aquellas partículas cuya velocidad inicial estuvo comprendida entre los valores v_0 y $v_0 + \Delta v_0$. Pero ese número es

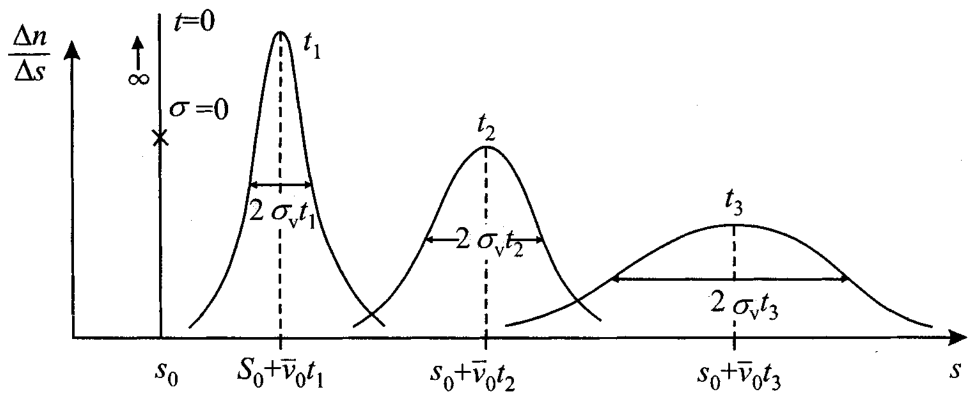
precisamente Δn, dado arriba. Reemplazando, entonces, en esa expresión los valores de v_0 y Δv_0, obtenemos para el número de partículas que está en el intervalo entre s y $s + \Delta s$ en el instante t :

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\overline{v_0} - \frac{s-s_0}{t}\right)^2}{2\sigma_v^{\,2}}} \frac{\Delta s}{t} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_v t} e^{-\frac{\left(s_0 + \overline{v_0} t - s\right)^2}{2(\sigma_v t)^2}} \Delta s$$

Llamando $\sigma_s = \sigma_v t$ y $\bar{s} == s_0 + v_0 t$ tenemos:

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{s}-s)^2}{2\sigma_s^{\,2}}} \Delta s$$

Volvemos a obtener una distribución de Gauss. Pero ahora se trata de una distribución de Gauss en las posiciones de las partículas. El valor medio de esa distribución, o sea,



la posición más probable $\bar{s}$ de las partículas, depende del tiempo: se traslada con movimiento uniforme y velocidad $\overline{v_0}$, que es la velocidad más probable inicial. La dispersión en la posición $\sigma_s = \sigma_v t$ también depende del tiempo: crece linealmente con *t*, indicando que el conjunto de partículas está cada vez más "esparcido" en su posición; la distribución "se va diluyendo". Esto se visualiza muy bien representando gráficamente $\Delta n/\Delta s$ (densidad de partículas), para distintos instantes de tiempo crecientes. El área subtendida por las curvas siempre es *N*. En el instante $t = 0$, la "curva" de Gauss tiene espesor nulo, altura infinita pero área N : ¡las partículas están totalmente localizadas en el punto s_0!

Podríamos haber considerado la cantidad $\Delta p = \Delta n/N$. Ésta es la probabilidad para encontrar una partícula en el intervalo entre s y $s + \Delta s$, en el instante *t*.

Con este ejemplo se ve claramente por qué en física cuántica (que describe los dominios atómicos) no tiene sentido hablar de "partícula" en el sentido usual: cuando no se

conocen con exactitud ambas condiciones iniciales (y ello no es posible por naturaleza), sólo se podrá hablar de la "posición más probable" de la partícula, de su "velocidad más probable", y de las dispersiones en la posición y en la velocidad (las partículas "se diluyen" o se "borronean").

Estudiemos ahora el ejemplo de un movimiento con aceleración constante (movimiento uniformemente acelerado). Según la (2.4a) obtenemos, haciendo $t_0 = 0$:

$$v = v_0 + a\,t$$

La velocidad variará linealmente con el tiempo. La (2.4b) resulta en este caso:

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

Nuevamente, según los signos relativos de v_0 y a, obtendremos distinto comportamiento físico (ver página 46). Si v_0 y a tienen el mismo signo (no importa cuál), el término lineal en t y el cuadrático variarán en el mismo sentido, y el móvil se alejará monótonamente de la posición inicial (la distancia $|s - s_0|$ crece monótonamente). Si, en cambio, v_0 y a tienen signos opuestos (no importa cuáles), el término lineal predominará sobre el cuadrático para t pequeño y el móvil se alejará de s_0; pero, a medida que crece el tiempo, el término cuadrático empieza a "hacerse sentir" anulando paulatinamente la acción del término lineal por tener signo opuesto: el móvil vuelve a acercarse a s_0, y pasará por s_0 cuando los dos términos tengan igual valor absoluto: $|v_0\,t| = |1/2\,a\,t^2|$, o sea, cuando $t = 2|v_0/a|$. Después de ese instante, el término cuadrático siempre "llevará la delantera" y el móvil se alejará de s_0 indefinidamente en el sentido opuesto al inicial.

Aquí hemos "horrorizado" a propósito a los lectores "matematificados" con este ejemplo de descripción cualitativa, para hacer resaltar explícitamente la importancia de las discusiones cualitativas de movimientos, *antes* de todo intento de descripción matemática. Esta última parte para el caso bajo análisis (en el que, por ejemplo, $a > 0$ y $v_0 < 0$) de la siguiente ecuación de movimiento:

$$s = s_0 - |v_0|t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

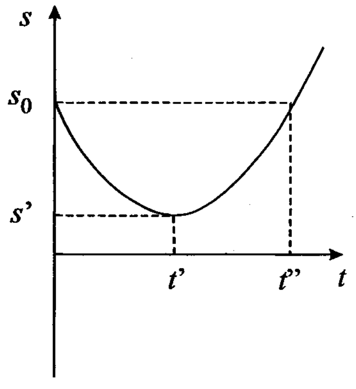
(ponemos $-|v_0|t$ para resaltar el signo negativo). Esta función pasa por un extremo s' en:

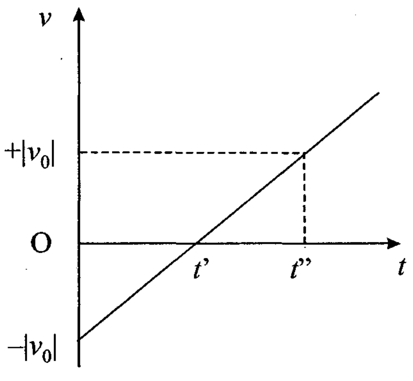
$$\frac{ds}{dt} = -|v_0| + a\,t' = 0 \qquad , \qquad t' = \frac{\overline{v_0}}{a}$$

o sea, cuando $s' = s_0 - 1/2\,|v_0^2|/a$. Ese extremo es un mínimo por cuanto $d^2s/dt^2 > 0$ en t'. En ese punto $v' = -|v_0| + a\,t' = 0$ (el móvil invierte su marcha). Vuelve a pasar por s_0 en el instante t'', solución de

$$s = s_0 - |v_0| t'' + \frac{1}{2} a t''^2$$

o sea, $t'' = 2|v_0|/a$ (la otra solución $t'' = 0$ es trivial, pues nos vuelve a dar el instante inicial). Observamos que $t'' = 2\,t'$. La velocidad del móvil en t'' es $v'' = -|v_0| + a\,t'' = +|v_0| = -v_0$, o sea de igual módulo, pero de sentido opuesto que en el instante inicial. Los gráficos $s = s(t)$ y $v = v(t)$ son:



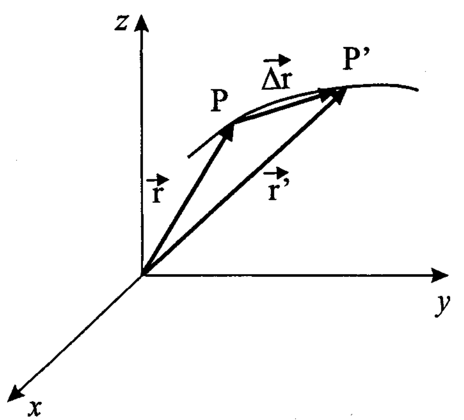


f) El concepto de velocidad como ente vectorial

Hasta aquí hemos considerado movimientos rectilíneos exclusivamente. Volvamos al caso general de un movimiento en el espacio. La posición está dada por la función vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

que significa $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



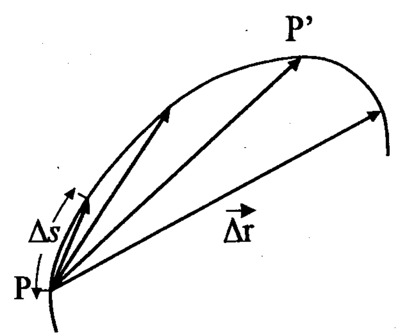
Sean dos posiciones sucesivas P y P' correspondientes a los instantes t y t', señalados por los vectores **r** y **r'**. El vector $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ se llama vector *desplazamiento* del punto material entre los instantes t y t'. Sus componentes son:

$$\Delta r_x = x' - x = \Delta x$$
$$\Delta r_y = y' - y = \Delta y$$
$$\Delta r_z = z' - z = \Delta z$$

El vector desplazamiento no tiene significado físico particular, puesto que no nos da ninguna información sobre dónde estuvo el móvil entre P y P' (o sea, entre t y t'). Meramente nos refiere la posición del punto material respecto de la posición que tuvo en algún instante anterior. Pero si P' se va aproximando a P, el vector desplazamiento tiende cada vez más a confundirse con la trayectoria. En particular, si P' tiende a P, el módulo del vector $\Delta\mathbf{r}$ tiende a confundirse con la distancia Δs recorrida sobre la curva entre t y t' (elemento de arco).

Asimismo, el vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ no tiene ningún significado físico, pero

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (2.6)$$



lo tiene. Su módulo tiende a $\Delta s/\Delta t$ donde Δs es el elemento de arco, o sea, la verdadera distancia recorrida entre t y t'; es decir que el módulo tiende a lo que en el caso del movimiento rectilíneo habíamos definido como velocidad. La dirección de $\mathbf{v}$ es la de la tangente a la trayectoria, dándonos entonces lo que entendemos por "dirección de movimiento". Finalmente, el sentido de $\mathbf{v}$ nos representa el sentido del movimiento sobre la trayectoria. El vector $\mathbf{v}$ es el *vector velocidad*. El hecho de considerar la velocidad como ente vectorial está de acuerdo con nuestra intuición, ya que no nos basta un solo número para describir exhaustivamente un movimiento en el espacio: no basta con decir si el móvil va "rápido" o "lento", sino que debemos decir además hacia dónde se mueve. En un movimiento rectilíneo, el vector velocidad tiene la dirección constante de la recta y el sentido del movimiento sobre la recta.

El vector $\mathbf{v}$ representa la existencia del límite del cociente diferencial (2.6), expresando así la continuidad del movimiento en el espacio (tal como la existencia de ds/dt expresaba la continuidad del movimiento rectilíneo).

Las componentes del vector velocidad según nuestra terna de ejes son:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$
$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$

Para representar el vector **v** geométricamente, se conviene en dibujarlo como segmento dirigido aplicado al punto en movimiento. Pero es importante recordar que esto es una convención: el vector **v** está esencialmente definido por sus componentes o por su módulo, dirección y sentido, que no dicen nada sobre dónde debe ser aplicado. Es un vector libre.

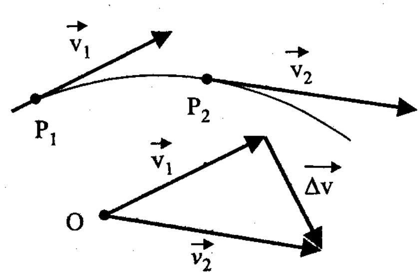
g) El concepto de aceleración como ente vectorial

Podemos definir un *vector aceleración* como

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (2.7)$$

donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Aquí hay una diferencia fundamental con el caso del movimiento rectilíneo. Dado que aparece $\Delta\mathbf{v}$, o sea la variación del vector velocidad, **a** puede ser distinto de cero, aún si el módulo de **v** fuese constante, con tal de que varíe su dirección. O sea, un movimiento puede ser acelerado aun si la "rapidez" se mantuviese constante; basta que se modifique la dirección del movimiento. Ello se debe precisamente a que hemos ampliado el concepto original de velocidad, ente representativo de la "rapidez" de movimiento, llegando al concepto conjunto de rapidez y dirección del movimiento.

Sea el movimiento sobre una trayectoria plana. Consideremos dos posiciones sucesivas P_1 y P_2 en los instantes t_1 y t_2. El vector aceleración instantánea es:

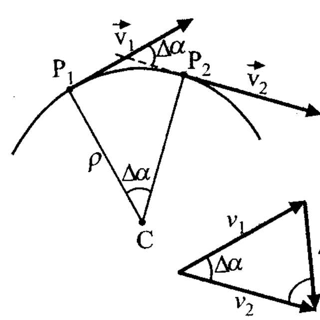


$$\mathbf{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Para hacer la diferencia $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ geométricamente, hay que llevar ambos vectores a un mismo origen. El vector **a** tendrá entonces la misma dirección y sentido que $\Delta\mathbf{v}$, en el límite en que el punto P_2 se encuentra muy próximo al P_1.

Supongamos ahora que $|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| = v = \text{cte.}$, o sea, que el movimiento no cambia de "rapidez" (recorre porciones iguales de trayectoria en tiempos iguales). En ese caso y en el límite $P_2 \to P_1$ (o sea $\Delta\alpha \to 0$, ver figura), $\Delta\mathbf{v}$ se hace perpendicular a **v**, valiendo su módulo

$$|\Delta\mathbf{v}| = v\,\Delta\alpha$$



Por lo tanto, el vector aceleración será perpendicular al vector velocidad, su sentido dirigido hacia la parte cóncava de la trayectoria, siendo su módulo:

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = v\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

Volviendo a examinar la figura con los vectores **v** aplicados a los puntos P_1 y P_2, observamos que, en el límite $P_2 \to P_1$, $\Delta s = v\,\Delta t$, o sea $\Delta t = \Delta s / v$. Además, $\Delta s = \rho\,\Delta\alpha$, donde ρ es, por definición, el radio de curvatura de la trayectoria (radio de la circunferencia tangente – círculo osculador). Con estas consideraciones nos queda finalmente:

$$|\mathbf{a}| = v\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v\frac{\Delta\alpha}{\Delta s/v} = v^2\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{v^2}{\rho} \qquad (2.8a)$$

La aceleración en un movimiento curvo con $|\mathbf{v}|$ = cte. ("movimiento curvilíneo uniforme") se llama *aceleración centrípeta.* Su módulo es v^2/ρ, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en cuestión: su dirección es perpendicular a la trayectoria y su sentido es hacia el centro de curvatura.

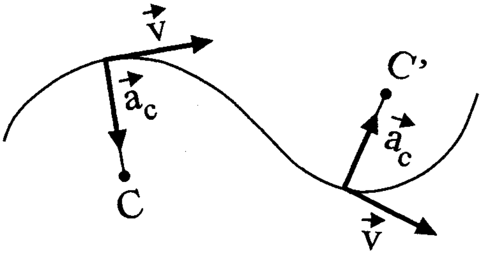
En el caso general, en que $|\mathbf{v}|$ no es constante, la aceleración no tiene la dirección de la normal. En este caso podemos descomponer $\Delta\mathbf{v}$ en dos direcciones: una normal a $\mathbf{v}_2$ y otra paralela, obteniendo los vectores $\Delta\mathbf{v}_n$ y $\Delta\mathbf{v}_t$. En el límite $P_2 \to P_1$, $\Delta\mathbf{v}_n$ es perpendicular a la trayectoria, y de módulo:

$$|\Delta v_n| = v\,\Delta\alpha$$

$\Delta\mathbf{v}_t$, en cambio, tiene la dirección de la tangente y módulo

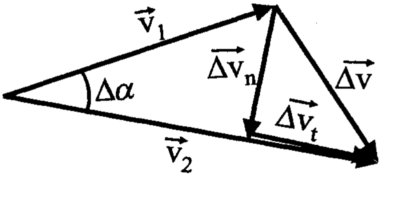
$$|\Delta v_t| = |v_2| - |v_1| = \Delta|v|$$

(variación del módulo de la velocidad).



El vector aceleración aparece entonces como suma de dos vectores:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_t}{\Delta t} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_t$$

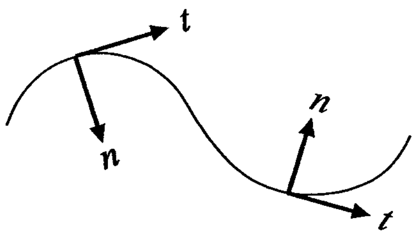


El primero, $\mathbf{a}_c$, tiene la dirección de la normal, el sentido hacia la parte cóncava de la curvatura, y módulo $|a_c| = v^2/\rho$. Es la aceleración centrípeta y representa la variación de la dirección de la velocidad. El segundo vector tiene la dirección de la tangente y módulo

$|a_t| = d|v|/dt$. Se lo llama *aceleración tangencial* y representa la variación de la "rapidez" de movimiento sobre la curva.

En resumen:

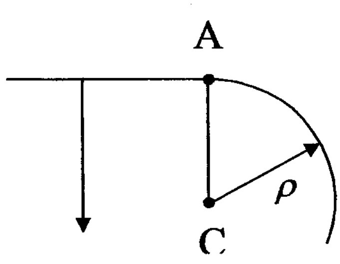
$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n} + \frac{dv}{dt}\,\mathbf{t} \qquad (2.8b)$$



donde **t** es el vector unitario tangente dirigido en sentido del movimiento, y **n,** el vector unitario normal, dirigido hacia la parte cóncava. Obsérvese que mientras la aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$ tiene un sentido que depende del movimiento (en la dirección del movimiento si $dv/dt > 0$ (acelerado), opuesto a la dirección del movimiento si $dv/dt > 0$ (decelerado)), la $\mathbf{a}_c$ siempre tiene el sentido dado por la concavidad de la curva. Obsérvese, en general, que la aceleración centrípeta está determinada por la forma geométrica de la trayectoria.

Si el movimiento ocurre sobre una recta, $\rho = \infty$ y sólo puede haber aceleración tangencial.

Si $\rho = \text{cte.}$, el movimiento es circular. Un caso particular es el movimiento circular uniforme. En este caso $|\mathbf{v}| = \text{cte.}$ y $a_t = dv/dt = 0$. La aceleración centrípeta $a_c = v^2/\rho$ es constante.

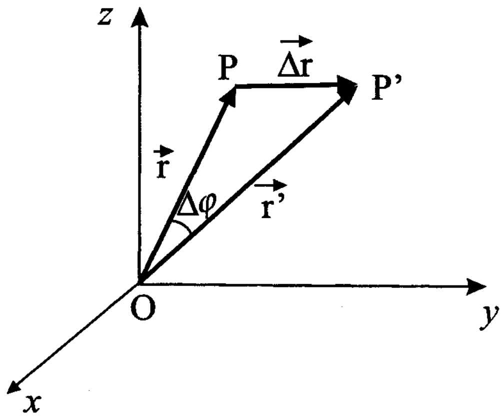


Aquí conviene ilustrar nuevamente el hecho físico de que la derivada de la aceleración no necesita existir (página 48). Consideremos un movimiento uniforme ($|v| = \text{cte.}$) sobre una trayectoria que cambia bruscamente de curvatura (por ejemplo, una recta que empalma en una circunferencia). Del punto A hacia la izquierda, la aceleración será nula. Del punto A hacia la derecha, la aceleración será la centrípeta, dada por el valor (constante) $a_c = v^2/\rho$. Hay, por lo tanto, en A un salto brusco en la aceleración, para la cual no existe derivada en el instante en que el móvil pasa por ese punto.

h) La velocidad angular

Consideremos un móvil puntual que en un intervalo Δt se desplaza de un punto P al P'. El radio vector barre en ese lapso un ángulo $\Delta\varphi$. Se define la *velocidad angular* instantánea como

$$\Omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \qquad (2.9)$$



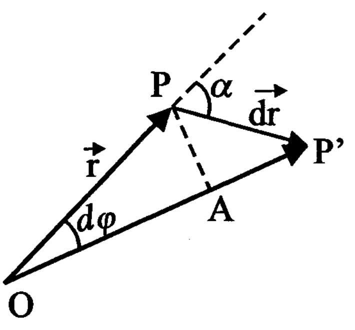
Nuevamente, la existencia de este límite está conectada con la continuidad del movimiento.

Obsérvese que al hablar de velocidad angular es imprescindible especificar respecto de qué punto se la considera. Para el caso de la figura, Ω es la velocidad angular respecto de O. La velocidad angular depende del punto de referencia.

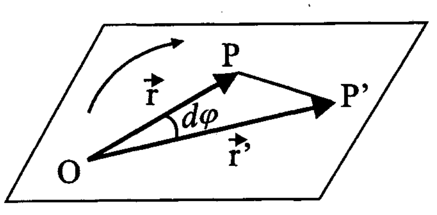
Un hecho importante, muy poco comentado en los libros, es que la velocidad angular es "más natural" para los seres humanos que la velocidad lineal: efectivamente, todos los animales no tienen percepción sensorial para velocidades lineales, pero sí para velocidades angulares. El ojo registra únicamente movimientos o desplazamientos angulares (por la proyección del mundo tridimensional sobre la retina bidimensional). Al observar el movimiento de un tren, de un avión o de un satélite, sólo registramos la velocidad angular (respecto de nuestros ojos); es nuestra mente la que, a través de la experiencia, transforma la percepción de movimiento angular en velocidad lineal, siempre que conozcamos el tamaño real del objeto (y, con ello, la distancia a la que se encuentra).

Entre la velocidad angular y la velocidad lineal existe la relación

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\text{AP}}{r\,dt} = \frac{dr\,\text{sen}\alpha}{r\,dt} = \frac{v\,\text{sen}\alpha}{r}$$



Ahora bien, obsérvese que en la noción de velocidad angular debería estar incluida más información que meramente el incremento de ángulo en un tiempo *dt*. Efectivamente, en el desplazamiento del radio vector, quedan además automáticamente definidos un plano (OPP') y un sentido de giro. Pero esto justamente significa que estamos en presencia de un vector, cuya dirección está dada por la normal al plano barrido por el radio vector y cuyo sentido deberá relacionarse con el sentido del giro del radio vector en ese plano.

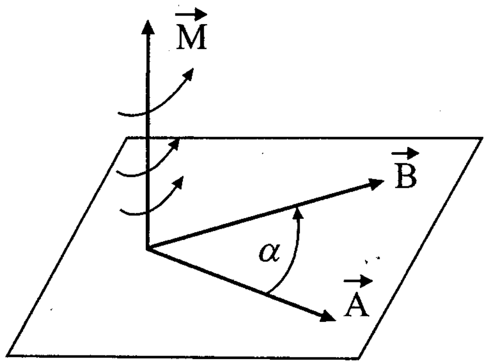


De esta manera se introduce el *vector velocidad angular* $\mathbf{\Omega}$, de módulo $|\Omega| = d\varphi/dt$ y de dirección normal al plano definido por **r** y **v** (o *d***r**). Respecto del sentido, sólo se lo puede fijar mediante una convención (arbitraria), ya que ambos lados del plano definido

por **r** y **v** son físicamente indistinguibles. Esto se basa en un postulado de simetría fundamental de la física clásica, según el cual los procesos físicos (clásicos) no distinguen entre "izquierda" y "derecha". La convención que se adopta es la "regla del tirabuzón": el sentido del vector **Ω** es aquel en el cual avanzaría un tirabuzón que gire como el radio vector. Obsérvese que esta convención sólo funciona gracias a que todos los tirabuzones se maquinan con la misma rosca. Ésta no es una observación trivial, sino que hace resaltar el carácter convencional del sentido del vector rotación.

Vectores cuyos sentidos dependen de una convención (pero la cual, una vez adoptada, lo fija unívocamente) se llaman vectores "axiles". Vectores con sentido unívoco, físicamente determinado, como la velocidad, constituyen los vectores "polares".

Para relacionar el vector **Ω** con los vectores **v** y **r** se introduce una nueva operación vectorial. Es el *producto vectorial* entre dos vectores. Consideremos dos vectores **A** y **B** en un plano. Definiremos como producto vectorial del vector **A** por el vector **B**, indicado por el símbolo **A x B**, a un vector **M** que es: 1) perpendicular al plano de los dos vectores, 2) de sentido dado por la regla del tirabuzón cuando, llevados a un mismo origen, el primer vector **A** gira sobre el segundo **B**, y 3) de módulo



$$|M| = |A|\,|B|\,\text{sen}\,\alpha \qquad (2.10a)$$

donde α es el ángulo formado entre los dos vectores.

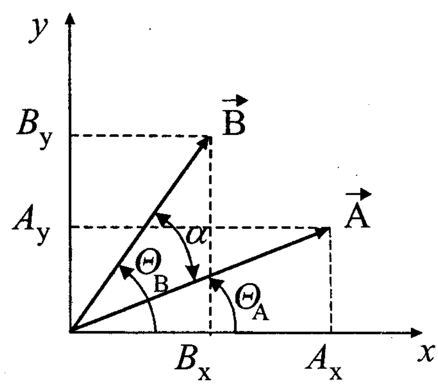
Obsérvese que un producto vectorial es nulo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

a) es nulo uno de los vectores;

b) los dos vectores son paralelos (en particular, **A x A** = 0).

Asimismo, **A x B** = –**B x A** (no es conmutativo).

El producto vectorial es distributivo respecto de la suma.



Arriba hemos dado la definición geométrica de producto vectorial. Veamos ahora la definición analítica. Para eso consideramos un sistema de coordenadas, cuyo eje z es perpendicular al plano determinado por los vectores **A** y **B**. Las componentes de **A** y **B** son $(A_x, A_y, 0)$ y $(B_x, B_y, 0)$. De acuerdo con su definición geométrica, **M** tendrá sólo una componente según el eje z en la dirección positiva: $(0, 0, M_z)$. El módulo de **M** será, de acuerdo a (2.10):

$$|M| = |A|\,|B|\,\text{sen}\,\alpha$$

Pero $\alpha = \theta_B - \theta_A$ (ver figura). Entonces:

$$sen\alpha = \text{sen}\left(\theta_B - \theta_A\right) = \text{sen}\theta_B\cos\theta_A - \cos\theta_B\,\text{sen}\theta_A$$

Como:

$$\text{sen}\theta_B = \frac{B_y}{|B|} \qquad \cos\theta_A = \frac{A_x}{|A|} \qquad \cos\theta_B = \frac{B_x}{|B|} \qquad \text{sen}\theta_A = \frac{A_y}{|A|}$$

queda:

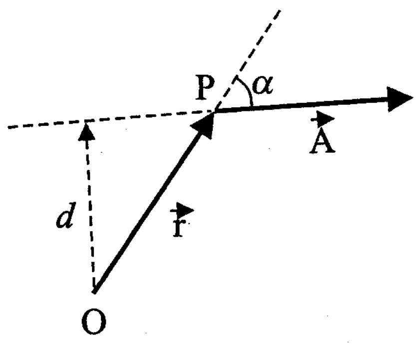
$$M_z = |A|\,|B|\left[\frac{B_y A_x}{|B||A|} - \frac{B_x A_y}{|B||A|}\right] = A_x\,B_y - A_y\,B_x$$

Cuando los dos vectores **A** y **B** no están en el plano *x,y*, se puede demostrar mediante un ejercicio de geometría que el vector **M** tendrá por componentes:

$$M_x = A_y\,B_z - A_z\,B_y$$

$$M_y = A_z\,B_x - A_x\,B_z \qquad (2.10b)$$

$$M_z = A_x\,B_y - A_y\,B_x$$



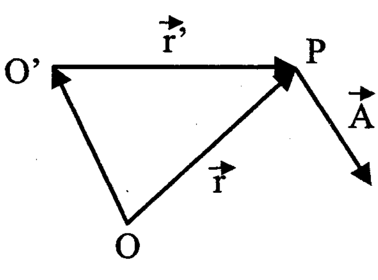
Obsérvese bien la reglita cíclica de los índices.

Consideremos ahora un vector **A** aplicado a un punto P, y un punto fijo O. Llamamos *momento* del vector **A** respecto del punto O al producto vectorial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$$

donde **r** es el vector posición de P respecto de O. El módulo de **M** será:

$$M = A\,r\,\text{sen}\,\alpha = A\,l \qquad (2.11)$$



donde l es la distancia del punto O a la recta definida por la dirección de **A** y que pasa por P.

El momento depende del punto O, llamado centro de momentos. Si desplazamos el centro de O a O', tendremos: **M'** = (momento respecto del nuevo centro O') = **r' x A**. Pero **OO'** + **r'** = **r** (ver figura); entonces

$$\mathbf{M'} = \mathbf{r} \times \mathbf{A} - \mathbf{OO'} \times \mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{OO'} \times \mathbf{A} \qquad (2.12)$$

M es el momento respecto del "viejo" centro O. La (2.12) representa la regla de transformación que sufre el vector momento cuando se cambia de centro de momentos.

Con todos estos resultados, es fácil comprobar que el vector velocidad angular de un punto respecto del origen de coordenadas es:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^2} \qquad (2.13)$$

ya que

$$|\mathbf{\Omega}| = \frac{r\,v\,\mathrm{sen}\alpha}{r^2} = \frac{v\,\mathrm{sen}\alpha}{r}$$

con dirección perpendicular al plano **v**, **r**, y sentido dado por la regla del tirabuzón (página 60). O sea, la velocidad angular de un móvil respecto de un punto es el momento de la velocidad lineal respecto de ese punto, dividido por r^2. Por lo tanto, la velocidad angular depende del punto de referencia.

i) Composición de movimientos

Hemos observado al principio de este capítulo que el movimiento es un concepto relativo. Supongamos que un cuerpo A se mueve respecto de un cuerpo B, y que éste se mueve respecto de un cuerpo C. Es necesario dar la relación que vincula la descripción de estos dos movimientos con la descripción del movimiento de A respecto de C. Sea **r** el vector posición de un cuerpo respecto de un sistema de coordenadas dado. Si ahora cambiamos de sistema de referencia, pasando a un sistema con centro en O' y de ejes paralelos al anterior, el nuevo vector posición será **r'**. Evidentemente se cumple la relación (ver la figura):

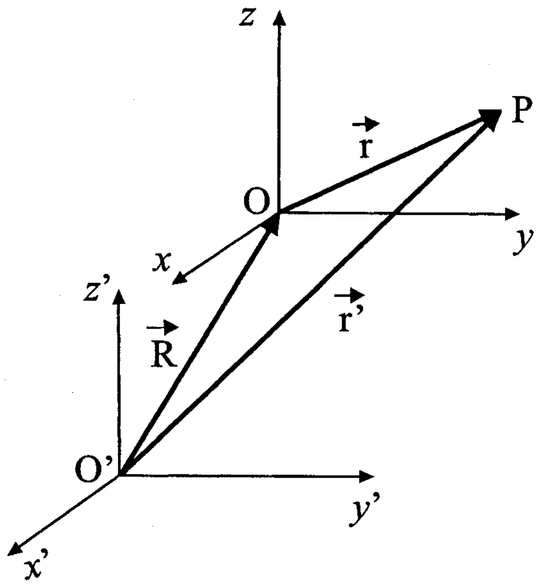
$$\mathbf{r'} = \mathbf{r} + \mathbf{R}$$

Si ambos sistemas están en reposo mutuo, **R** es constante y $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$. O sea, la velocidad del punto P es la misma, vista desde ambos sistemas (a pesar de que las coordenadas son distintas). Si, en cambio, el sistema O(x, y, z) se *traslada* respecto del O'(x', y', z') (manteniendo sus ejes paralelos a los de O'), tenemos:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}$$

donde **V** es la velocidad del sistema O(*x*, *y*, *z*) respecto del O'(*x*', *y*', *z*') (llamada a veces "velocidad de arrastre"). En este caso tenemos, derivando la expresión de **r'**:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V} \qquad (2.14)$$



v' es la velocidad de P respecto del sistema O (sistema "fijo"). Se la suele denominar "velocidad absoluta", dejando para **v** (velocidad de P respecto del sistema "móvil" O') el nombre de velocidad "relativa". Estas denominaciones son inconvenientes desde el punto de vista conceptual. Lo correcto es llamar las velocidades "por su nombre", o sea: velocidad respecto del sistema O (**v**), velocidad respecto de O' (**v'**) y velocidad de O respecto de O' (**V**). La expresión (2.14) se interpreta diciendo que los movimientos (de traslación) se suman vectorialmente.

Tal como se puede componer movimientos, un movimiento dado puede descomponerse en dos o más movimientos independientes superpuestos. Ello equivale a descomponer el vector velocidad en dos o más vectores sumandos. En particular, las tres componentes del vector velocidad pueden ser consideradas como las velocidades de tres movimientos independientes según los ejes de coordenadas.

Capítulo 3

Dinámica del punto material

a) Primera y Segunda Ley de Newton

En el capítulo 2 hemos considerado el movimiento de un punto sin preocuparnos por las causas del mismo. La experiencia nos dice que un cuerpo no modifica su movimiento a menos que se ejerzan ciertas acciones sobre él. En otras palabras, la experiencia dice que un cuerpo no cambia su movimiento a menos que se lo ponga en interacción con otro. "No cambia su movimiento" significa que su vector velocidad permanece constante. Lo que acabamos de enunciar es una ley física deducida de una experiencia física. Esta experiencia física es por cierto ideal, puesto que ha consistido en observar el movimiento de un cuerpo libre de toda interacción. La condición ideal puede en todo caso aproximarse con experiencias reales cada vez más refinadas. La ley recién enunciada se llama "Primera Ley de Newton".

En resumen, un cuerpo libre de acciones exteriores se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (porque $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a} = 0$). En particular, si está inicialmente en reposo respecto de un sistema, continuará en reposo, mientras no tenga interacción con otro cuerpo.

Ahora bien, la experiencia nos dice que para modificar el estado de movimiento, o sea, acelerar un cuerpo, inicialmente libre de acciones, es necesario ejercer cierto esfuerzo muscular, o ponerlo en contacto con sistemas, en los que observaremos ciertas modificaciones (deformaciones, aceleraciones, calentamiento, etc.). Esto no sólo resulta para una modificación del módulo de la velocidad (aceleración tangencial), sino vale también para cambios en la dirección del movimiento (aceleración centrípeta).

Observamos que cuanto mayor es el esfuerzo muscular que realizamos, o mayor la modificación en el sistema actuante, mayor será la aceleración producida. La "acción dinámica" (ente físico que representaría nuestro "esfuerzo muscular"), responsable de la modificación del movimiento de un cuerpo, podrá ser definida entonces como magnitud proporcional a la aceleración producida. Mejor dicho, debe ser proporcional al *vector* aceleración (no basta que lo sea al módulo), pues la experiencia muestra que la acción también determina la dirección de la aceleración.

Podríamos, en un principio, igualar esta "acción dinámica" a la aceleración, pero eso significaría que la acción que se debe ejercer para acelerar un cuerpo es independiente del mismo. Y eso es contrario a la experiencia. Efectivamente, observamos que para acelerar una esfera grande de un material dado debemos ejercer un esfuerzo mayor que para acelerar de la misma manera una esfera más pequeña del mismo material. El factor de proporcionalidad entre la "acción dinámica" y la aceleración depende entonces del cuerpo, y representa su "inercia" (mayor o menor "resistencia" de un cuerpo para ser acelerado). Finalmente, se comprueba que la inercia es aditiva, es decir que, para acelerar varios cuerpos a la vez, es necesario ejercer esfuerzos mayores, suma de los esfuerzos individuales para acelerar cada uno de ellos por separado.

Al ente representativo de la "acción dinámica" lo llamaremos "vector fuerza", y al ente representativo de la "inercia" lo llamaremos "masa inercial". Escribiremos la relación

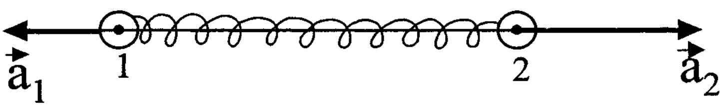
$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

Esta igualdad expresa la llamada "Segunda Ley de Newton".

b) Dificultades conceptuales en la Segunda Ley de Newton: las leyes de Mach

Todo lo que presentamos en el párrafo precedente tiene una falla grave. Por ejemplo: ¿Cómo hacemos para saber si dos cuerpos tienen igual masa inercial? Se diría: se los somete a la acción de "una misma fuerza" y se ve si tienen igual aceleración. ¿Pero cómo comprobamos si realmente están bajo la acción de una misma fuerza? Ésta es la falla intrínseca de las "leyes" de Newton, que fue eliminada por Mach (a mediados del siglo XIX). Vamos a esbozar aquí el método de Mach, que enseña muchas cosas fundamentales, imprescindibles para el conocimiento conceptual correcto de la Mecánica.

El método de Mach parte del estudio experimental de dos cuerpos en interacción mutua. Se procede así: sean dos cuerpos puntuales aislados en el espacio que ejercen acciones uno sobre el otro (por ejemplo: un resorte entre los dos que los aleja mutuamente, una explosión de dinamita entre los dos, un individuo sentado sobre uno de ellos que empuja al otro, dos cuerpos que se atraen por gravitación, etc.).



Se comprueba *experimentalmente*:

1°) En todo instante, las aceleraciones del cuerpo 1 y del cuerpo 2 tienen la dirección de la recta que une a los dos cuerpos y sentidos mutuamente opuestos, cualquiera que fuese el mecanismo por el cual se aceleran.

2°) En todo instante, el cociente de los módulos a_1/a_2 tiene siempre el mismo valor, cualquiera que fuese el mecanismo de interacción. Este valor depende exclusivamente de los dos cuerpos que interactúan.[6]

6. Es necesario que el mecanismo de interacción –resorte, individuo, dinamita– forme parte de uno de ellos, o sea, esté rígidamente unido a uno de ellos. De lo contrario, tendríamos una interacción entre tres cuerpos: el cuerpo 1, el 2 y el mecanismo (resorte, etc.). El caso de dos cargas eléctricas en movimiento requiere una consideración aparte.

El valor del cociente de los módulos de las aceleraciones, que es independiente del mecanismo y que representa una cualidad inherente de los cuerpos 1 y 2, lo llamamos "*masa inercial* del cuerpo 2, en unidad del cuerpo 1" y lo representamos con el símbolo m_{21} (obsérvese bien la convención sobre los subíndices):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1'}{a_2'} = \frac{a_1''}{a_2''} = \text{cte.} = m_{21}$$

a, *a'*, *a"* son las aceleraciones de los cuerpos 1 y 2, para diferentes mecanismos de interacción, o para diferentes instantes de tiempo. Estas aceleraciones variarán de caso en caso y en función del tiempo. Lo esencial y notable es que el cociente de sus módulos se mantiene invariable para los dos cuerpos.

Si ahora tomamos un tercer, cuarto, enésimo cuerpo, y los ponemos en interacción mutua con el 1, tendremos, cualquiera sea el mecanismo de interacción:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1'}{a_3'} = \frac{a_1''}{a_3''} = \ldots.. = \text{cte.} = m_{31} \qquad \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1'}{a_4'} = \ldots.. = m_{41} \qquad \frac{a_1}{a_n} = \frac{a_1'}{a_n'} = \frac{a_1''}{a_n''} = \ldots.. = m_{n1}$$

3°) Si ahora ponemos el cuerpo 3 en interacción con el cuerpo 2, observamos experimentalmente que

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_2'}{a_3'} = \frac{a_2''}{a_3''} = \text{cte.} = m_{32} = \frac{m_{31}}{m_{21}}$$

La última igualdad es un resultado nuevo, que no se puede deducir de los anteriores.

Si por "decreto" adoptamos de una vez por todas al cuerpo 1 como "unidad de masa inercial", podemos suprimir el índice 1 en m_{21}, m_{31}, y llamar el cociente

$$\frac{a_1}{a_n} = m_n \qquad (3.1)$$

"valor de la masa inercial del cuerpo *n*" (sobreentendiendo que es "en unidad del cuerpo 1"). Obsérvese que, así definido, el valor de la masa de un cuerpo es el número que mide cuántas veces más aceleración tiene el cuerpo unidad cuando es puesto en interacción con el cuerpo dado. Ese número dependerá por lo tanto del cuerpo unidad. Cambiando el cuerpo unidad, el valor de la masa de un cuerpo cualquiera (valor del cociente de aceleraciones) variará de acuerdo a la receta dada por (1.4), como se deduce fácilmente de la experiencia 3ª.

En resumen, las experiencias 1ª - 3ª permiten introducir una magnitud física llamada "masa inercial", que representa el hecho físico de que el cociente de las aceleraciones de dos cuerpos puestos en interacción mutua cualquiera es siempre el mismo, dependiendo sólo de los dos cuerpos. El valor numérico de esa magnitud está dado por el valor numérico de ese cociente, cuando uno de los dos cuerpos es el cuerpo convenido como unidad.

Se ve que de esta forma la masa inercial aparece como magnitud independiente. La unidad aceptada es el "kilogramo patrón", originalmente definido como la masa inercial de un cuerpo de platino archivado en Sèvres (París).

Dados dos cuerpos que interactúan "*i*" y "*k*", el hecho de que las aceleraciones sean de sentido opuesto y de que para sus módulos valga $a_i/a_k = m_k/m_i$ puede expresarse vectorialmente en la igualdad:

$$m_i\mathbf{a}_i + m_k\mathbf{a}_k = 0 \qquad (3.2)$$

Esta expresión nos permite introducir un ente que sea representativo de lo que intuitivamente entendemos por "intensidad de una interacción", o sea, del proceso de interacción en sí. Hasta ahora sólo tenemos un ente representativo de los cuerpos interactuantes, que es la masa inerte.

A primera vista podría tomarse la aceleración como "intensidad de interacción", puesto que parece natural calificar una interacción como tanto más fuerte cuanto mayor aceleración produzca en las masas interactuantes. Pero esto no sirve desde el punto de vista cuantitativo, puesto que, en general, las aceleraciones de los dos cuerpos serán diferentes entre sí, y no sabríamos cuál de las dos elegir como ente representativo. Pero precisamente gracias a la relación (3.2) encontramos un ente, expresado por $m_i\mathbf{a}_i$ o $m_k\mathbf{a}_k$, que, conteniendo a la aceleración, es el mismo (salvo el sentido) para las dos masas interactuantes. Por lo tanto, este ente nos permite representar en forma cuantitativa unívoca lo que entendemos por "intensidad" de la interacción en cuestión. Llamaremos a ese ente $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i$ *fuerza* sobre el cuerpo "*i*"; $m_k\mathbf{a}_k = \mathbf{f}_k$ será la fuerza sobre el cuerpo "*k*" en su interacción con el cuerpo "*i*". Es importante recordar que el concepto de fuerza representa físicamente la "intensidad" de la interacción, estando determinada por el proceso de interacción en sí.

Según (3.2) tenemos:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_k = 0 \qquad (3.3)$$

Vemos que, cuando dos cuerpos ejercen acciones mutuas entre sí, la fuerza que actúa sobre uno de ellos es igual y de sentido contrario a la fuerza que actúa sobre el otro. ¡Obsérvese que aparece el llamado "principio" de acción y reacción (Tercera Ley de Newton) como "yapa"! Es decir, no es ningún principio, sino una mera consecuencia de la definición de fuerza.

La relación $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ fija la fuerza como magnitud derivada. Sus dimensiones serán

$$[f] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$$

Para el sistema de unidades Kg, m, seg (sistema MKS), la unidad de fuerza será aquella que le imprime al kilogramo patrón una aceleración de 1 m seg^{-2}. Se la llama el "Newton", y sus dimensiones son Kg m seg^{-2}. Otra unidad de fuerza se obtiene para el sistema g, cm, seg (sistema cgs), y se denomina "dina": 1 dina = 1 g cm seg^{-2}. Teniendo en cuenta el significado del símbolo "g cm seg^{-2}" como regla de transformación para los

valores numéricos de las fuerzas cuando se cambia de unidades, resulta que 1 dina = 10^5 Newton.

El hecho notable del método de Mach es que se trabaja experimentalmente con aceleraciones. Ahora podemos contestar a la pregunta: ¿Cuándo dos cuerpos tienen igual masa? Será cuando, puestos en interacción mutua cualquiera, sus aceleraciones sean iguales en módulo.

Obsérvese la "receta" (página 15) para el proceso de medición de masa inercial de un cuerpo: se lo pone en interacción mutua al cuerpo unidad, se determinan las aceleraciones y se halla el cociente de sus módulos.[7] Recuérdese que la clave de todo esto es que ese cociente es el mismo, cualquiera sea el mecanismo por medio del cual interactúan los dos cuerpos. Para medir la fuerza proveniente de una interacción es necesario medir la aceleración que ésta le imprime a una masa dada en esa interacción.

Respecto de las masas inerciales y las fuerzas, se comprueba experimentalmente que son *aditivas*. Un cuerpo puntual, compuesto por varios cuerpos puntuales unidos rígidamente entre sí, se comporta como un solo cuerpo de masa

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n$$

Si un cuerpo puntual está sujeto simultáneamente a varias interacciones con distintos cuerpos, de intensidades $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_n$, la aceleración sufrida por el cuerpo será igual a la que le imprimiría una sola interacción, de intensidad

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{f}_n$$

La suma vectorial R se llama *resultante* de las interacciones, o resultante de las fuerzas actuantes.

La acción simultánea de varios procesos de interacción puede dar un efecto total nulo. La condición para ello es

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{f}_n = 0 \qquad (3.4)$$

Ésta es la condición de *equilibrio* para un cuerpo puntual. En ese caso, el cuerpo se mantendrá con movimiento uniforme rectilíneo, o permanecerá en reposo, según las condiciones iniciales.[8]

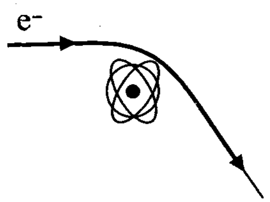
La adición vectorial de las intensidades de interacción permite determinar la fuerza de una interacción desconocida, oponiéndole una fuerza de una interacción conocida (o sea, de un proceso de interacción "calibrado") hasta lograr el equilibrio. Éste representa el procedimiento *estático* para medir intensidades de interacción (fuerzas).

Cada vez que observamos que un cuerpo está acelerado, éste necesariamente debe estar en interacción con otro u otros cuerpos. Cuando, en cambio, un cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, estará libre de interacciones, o sujeto a varias interacciones, cuya acción resultante se anula.

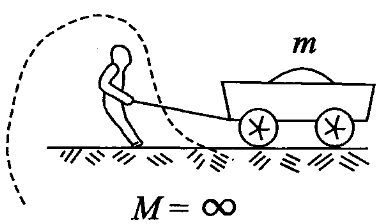
7. Es *muy difícil* medir la aceleración instantánea de un cuerpo. En la práctica, en particular para verificar las leyes de Mach, se procede de otra forma (ver capítulo 4, página 109).

8. Obsérvese que el equilibrio de fuerzas no implica necesariamente el reposo.

Consideremos, por ejemplo, el movimiento de la Luna. Es un movimiento aproximadamente circular uniforme alrededor de la Tierra, es decir, un movimiento con aceleración centrípeta. Ello quiere decir que está en interacción con la Tierra. El mecanismo de interacción correspondiente es el gravitatorio. En esa interacción, la Tierra tendrá una aceleración cuyo módulo está dado por la relación $a_T/a_L = m_L/m_T$. Esta aceleración causa un movimiento circular de la Tierra alrededor de un punto llamado centro de masa del sistema Tierra-Luna (ver capítulo 4). En esa interacción aparece una fuerza sobre la Luna y otra opuesta sobre la Tierra ("acción" y "reacción"–esta denominación es conceptualmente mala, por cuanto ambas fuerzas son físicamente equivalentes, no debiendo distinguírselas gramaticalmente).

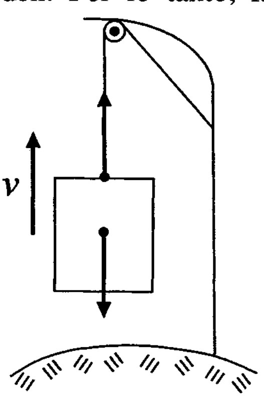


Otro ejemplo sería el de un electrón que pasa por las cercanías de un átomo. Observamos que el electrón se desvía; es decir, sufre una aceleración. Esto significa que entra en interacción con el átomo. En este caso se trata de una interacción electromagnética. Las aceleraciones del electrón y del átomo estarán en relación inversa de las masas. Como la masa del átomo es mucho mayor que la masa del electrón, la aceleración del átomo es en general muy pequeña, y el átomo prácticamente no se desviará. Se suele decir que el átomo (su campo eléctrico) "ejerce una fuerza" sobre el electrón. No se debe olvidar, sin embargo, que en esta interacción también aparece una fuerza igual y opuesta sobre el átomo; es sólo por la masa mucho más grande de éste que el efecto (la aceleración) es despreciable.



Un ejemplo similar lo tenemos cuando analizamos el caso de un carro tirado por un hombre: este último, por intermedio del frotamiento de sus pies sobre la tierra, forma con ésta, en el intervalo durante el cual "tira", un único "cuerpo", el cual interactúa con el carro (mediante el esfuerzo muscular). Pero sólo el carro tendrá una aceleración apreciable, ya que la masa del sistema Tierra-hombre es muchísimo mayor que la masa del carro.

Decimos simplemente que "el hombre ejerce una fuerza sobre el carro" y nos "olvidamos" de que el hombre forma parte del otro sistema, sobre el cual actúa una fuerza igual y contraria. Muy distinta es la situación de un hombre parado sobre hielo: no habiendo más frotamiento, el hombre y la tierra ya no forman más un único sistema; ahora los dos cuerpos interactuantes son el carro y el hombre, con masas inerciales del mismo orden. Por lo tanto, la aceleración imprimida al hombre ahora es comparable con la aceleración del carro, pero de sentido opuesto: el hombre "resbala" hacia el carro, y el único efecto será que el hombre y el carro se acercan mutuamente.



El último ejemplo conceptual que consideraremos aquí es el de un ascensor que sube con velocidad constante. En este caso la aceleración es nula. Como sabemos que de todas maneras la cabina del ascensor está en interacción gravitatoria con la Tierra, necesariamente debe haber otra interacción en equilibrio con la gravitatoria, para que $\mathbf{R} = 0$ y, con ello, el movimiento sea uniforme. Esa otra interacción, que también ocurre entre el ascensor y la tierra, es del tipo elástico, producida por los cables. La fuerza de interacción correspondiente (tensión de los cables)

debe ser igual y de sentido contrario a la fuerza de interacción gravitatoria (peso de la cabina), para que su acción conjunta sea nula (**R** = 0).

Consideraremos el caso de un cuerpo sobre el cual actúa una fuerza (o la resultante de varias fuerzas). La ecuación

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \qquad (3.5)$$

nos permite determinar la aceleración del movimiento:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m}$$

Estamos ahora en el caso visto en cinemática, donde la aceleración es una función dato. Por lo tanto, si conocemos la fuerza que actúa en todo momento sobre un cuerpo, tendremos determinado su movimiento, siempre que conozcamos su posición y su velocidad inicial.

La ecuación

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{f}}{m}$$

es una ecuación simbólica que representa las tres ecuaciones:

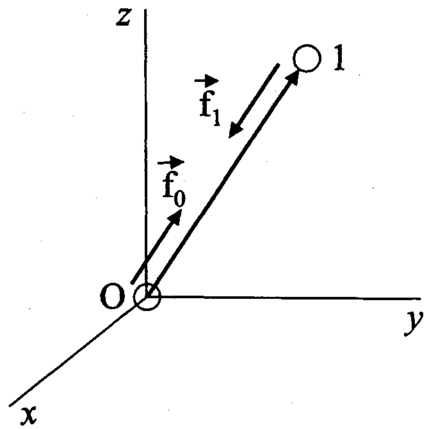
$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{f_x}{m} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{f_y}{m} \qquad (3.5a) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{f_z}{m} \end{aligned}$$

Por lo visto en el caso rectilíneo, cada una de estas ecuaciones tiene dos constantes de integración: x_0 y v_x^0; y_0 y v_y^0, z_0 y v_z^0, respectivamente, que son las componentes de los vectores posición y velocidad inicial.

c) Interacciones gravitatorias

Vamos a estudiar ahora algunos prototipos de interacciones muy importantes. En primer lugar consideraremos la interacción gravitatoria. La característica fundamental de esta interacción, que la distingue de todas las otras interacciones, es que *siempre existe* entre dos cuerpos cualesquiera y no puede ser modificada desde el exterior.

En general, la interacción gravitatoria entre dos cuerpos de características "normales" es muy débil, y requiere instrumentos de gran precisión para ser puesta en evidencia. Pero en cuerpos de dimensiones "astronómicas" (cuerpos celestes), la interacción gravitatoria conduce a efectos apreciables. La caída de un cuerpo (movimiento acelerado) revela la interacción gravitatoria entre el cuerpo y la Tierra (la cual, por su masa "infinita", tiene en esa interacción una aceleración nula). El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es resultado de su interacción gravitatoria con ésta, y el movimiento de los planetas alrededor del Sol revela la existencia de una interacción gravitatoria entre los primeros y el Sol.



Vamos a estudiar la interacción gravitatoria entre dos cuerpos puntuales, realizando una serie de experiencias ideales. Uno de los cuerpos (el cuerpo O), lo vamos a suponer fijo en el origen de nuestro sistema de coordenadas; vamos a medir la fuerza de interacción gravitatoria que actúa sobre el otro (el cuerpo "1"), y que, por supuesto, siempre será igual a la fuerza de interacción sobre el cuerpo O. Comprobamos *experimentalmente*:

1°) La fuerza siempre es atractiva, o sea, dirigida hacia el otro cuerpo. Depende además de la distancia r entre los dos cuerpos: $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(r)$. Cambiando ahora el cuerpo 1 por el cuerpo 2 tendremos nuevamente, para cada punto del espacio, un vector $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2(r)$.

2°) Respecto de los módulos de los vectores fuerza sobre los cuerpos 1 y 2 se comprueba:

$$\frac{f_2(r)}{f_1(r)} = \frac{f_2(r')}{f_1(r')} = \frac{f_2(r'')}{f_1(r'')} = \ldots = \mu_{21} = \text{cte.}$$

$f(r)$, $f(r')$, $f(r'')$, ... son las fuerzas de atracción gravitatoria sobre los cuerpos 1 y 2 en distintos puntos del espacio que rodea al cuerpo O. La constante μ_{21}, que es independiente de la posición y que representa una cualidad inherente de los cuerpos 1 y 2, se denomina "masa gravitatoria del cuerpo 2 en unidad del cuerpo 1".

Si ahora tomamos un tercer, cuarto y enésimo cuerpo, comprobamos igualmente:

$$\frac{f_3(r)}{f_1(r)} = \frac{f_3(r')}{f_1(r')} = \ldots = \mu_{31} \qquad \frac{f_4(r)}{f_1(r)} = \frac{f_4(r')}{f_1(r')} = \ldots = \mu_{41} \qquad \frac{f_n(r)}{f_1(r)} = \frac{f_n(r')}{f_1(r')} = \ldots = \mu_{n1}$$

obteniendo así las masas gravitatorias de esos cuerpos en unidad del cuerpo 1.

3°) Si ahora comparamos la fuerza que, en un punto dado, actúa sobre el cuerpo 3, con la que actúa sobre el cuerpo 2, verificamos experimentalmente:

$$\frac{f_3(r)}{f_2(r)} = \frac{f_3(r')}{f_2(r')} = ... = \mu_{32} = \frac{\mu_{31}}{\mu_{21}}$$

La última igualdad es un resultado nuevo que *no* se puede deducir de los anteriores. Si por "decreto" adoptamos de una vez por todas al cuerpo 1 como "unidad de masa gravitatoria", podemos suprimir el subíndice en μ_{21}, μ_{n1}, y llamar al cociente

$$\frac{f_n(r)}{f_1(r)} = \mu_n \qquad (3.6)$$

"masa gravitatoria del cuerpo n" (sobreentendiendo que es en unidad del cuerpo 1). Obsérvese que, así definido, el valor de la masa gravitatoria es el número que mide cuántas veces más intensa es la fuerza de atracción gravitatoria que actúa sobre el cuerpo "n", en comparación con la fuerza sobre el cuerpo unidad. Ese número dependerá, por lo tanto del cuerpo unidad. Cambiando el cuerpo unidad, el valor de la masa gravitatoria de un cuerpo cualquiera variará de acuerdo a la transformación dada en (1.4), como se deduce de la experiencia 3ª. Por ahora, el concepto de masa gravitatoria está representado por una magnitud independiente.

Los resultados de las experiencias ideales 1ª-3ª se pueden resumir en las igualdades vectoriales:

$$\mathbf{f}_2(r) = \mu_2 \mathbf{f}_1(r) \quad , \quad \mathbf{f}_3(r) = \mu_3 \mathbf{f}_1(r) \text{ , ...}$$

Hasta aquí aún no hemos hecho aparecer explícitamente al cuerpo O, colocado en el origen, y que era el "proveedor" de las interacciones gravitatorias analizadas arriba. Las igualdades vectoriales mencionadas nos permiten introducir un concepto físico ligado a ese cuerpo. Efectivamente, de ellas se deduce:

$$\frac{\mathbf{f}_2(r)}{\mu_2} = \frac{\mathbf{f}_3(r)}{\mu_3} = ... = \frac{\mathbf{f}_n(r)}{\mu_n} = \mathbf{G}(r) \qquad (3.7)$$

independiente de los cuerpos 1, 2, 3,... dependiente sólo de la posición y del cuerpo O. Este vector, definido en cada punto del espacio que rodea al cuerpo O, se llama *campo gravitatorio* del cuerpo O. Representa el hecho físico de que el cociente entre la fuerza de atracción gravitatoria y la masa gravitatoria es independiente de esta última; su valor numérico está dado por la fuerza que actúa sobre el cuerpo unidad de masa gravitatoria.

El campo gravitatorio constituye lo que se llama un *campo vectorial*: a cada punto del espacio le corresponde un vector. Un campo vectorial está dado por sus componentes en función de las coordenadas:

$$G_x = G_x(x, y, z)$$
$$G_y = G_y(x, y, z)$$
$$G_z = G_z(x, y, z)$$

Corresponde ahora determinar experimentalmente cómo depende el campo gravitatorio de la posición y del cuerpo O. Se comprueba:

4°) El módulo del vector **G** es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto en cuestión y el cuerpo que produce ese campo. La constante de proporcionalidad depende de ese cuerpo (en nuestro caso, el cuerpo O):

$$|\mathrm{G}(r)| = \frac{\mathrm{K}_0}{r^2}$$

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre un cuerpo 1 será:

$$f_1 = \mu_1 \frac{\mathrm{K}_0}{r^2}$$ (Ver nota 9)

Vamos a demostrar que la constante K_0 es proporcional a la masa gravitatoria del cuerpo O. Para ello bastará considerar que, por razones de simetría (ninguno de los dos cuerpos 1 y O es "privilegiado"), la fuerza f_0 sobre el cuerpo O deberá ser:

$$f_0 = \mu_0 \frac{\mathrm{K}_1}{r^2}$$

Como $f_1 = f_0$ ("principio" de acción y reacción), deducimos:

$$\frac{\mathrm{K}_0}{\mu_0} = \frac{\mathrm{K}_1}{\mu_1}$$

Como lo mismo valdrá para los cuerpos 2, 3, etc., puestos en interacción gravitatoria con el cuerpo O, tendremos:

$$\frac{\mathrm{K}_0}{\mu_0} = \frac{\mathrm{K}_1}{\mu_1} = \frac{\mathrm{K}_2}{\mu_2} = \frac{\mathrm{K}_3}{\mu_3} = \ldots\ldots = \gamma$$

Esta constante es independiente de los cuerpos en interacción, independiente del espacio, independiente del tiempo, independiente de todo. Es una *constante universal* y se la llama constante universal de gravitación. Su valor numérico depende sólo de las unidades elegidas para la masa gravitatoria, para las distancias y para los tiempos.

9. El infinito en $r = 0$ no molesta en física clásica; como hemos dicho que todo esto vale para cuerpos puntuales, éstos al acercarse mutuamente en la medida en que $r \longrightarrow 0$ ya no podrán más ser considerados puntuales (¡recuérdese el carácter relativo de cuerpo puntual!), y no valdrá más esta expresión.

Ahora podemos escribir para el campo gravitatorio de la masa μ_0:

$$G(r) = \gamma \frac{\mu_0}{r^2} \qquad (3.8)$$

y para la fuerza que en ese campo actúa sobre la masa μ:

$$f = \gamma \frac{\mu \, \mu_0}{r^2} \qquad (3.9)$$

Hemos dicho al principio de este párrafo que las interacciones gravitatorias se distinguen de las demás por estar presentes *siempre*. Esto querrá decir que a todo cuerpo de masa inercial m estará también asociada una masa gravitatoria μ. Experimentalmente se comprueba:

5°) La masa gravitatoria de un cuerpo sólo depende de su masa inercial, independientemente de su composición y demás condiciones físicas. La dependencia es una *proporcionalidad*:

$$\mu = \mathrm{k}\, m \qquad (3.10)$$

El factor de proporcionalidad es una constante universal, y su valor sólo depende de las unidades de masa gravitatoria y masa inercial.

En base a esta proporcionalidad entre masa gravitatoria y masa inercial, y adoptando la convención de elegir como unidad de masa gravitatoria a la masa del mismo cuerpo que sirve para definir la unidad de masa inercial (el kilogramo patrón), podemos hacer k = 1 y, con ello, escribir la igualdad:

$$\mu = m \qquad (3.10a)$$

Lo importante es recordar que, conceptualmente, la masa inercial y la masa gravitatoria son dos magnitudes físicas diferentes. La primera se mide comparando las aceleraciones, cuando es puesta en una interacción de cualquier tipo con el cuerpo "unidad de masa inercial"; la segunda se mide comparando la fuerza de interacción gravitatoria con la fuerza que actúa sobre el cuerpo "unidad de masa gravitatoria", cuando ambos son puestos en un campo gravitatorio. Es sólo gracias a su proporcionalidad, y en base a la convención de elegir como unidades de masa inercial y gravitatoria a un mismo cuerpo, que se puede escribir la igualdad (3.10a).

La proporcionalidad entre los dos tipos de masa tiene otra consecuencia importante: calculemos la aceleración que tienen los cuerpos 1, 2, etc., cuando son colocados en un mismo punto de un campo gravitatorio:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{m_1} = \frac{\mu_1 \mathbf{G}}{m_1} \;, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{m_2} = \frac{\mu_2 \mathbf{G}}{m_2}$$

Como $\mu_1/m_1 = \mu_2/m_2 = \mathrm{k}$, vemos que las aceleraciones de todos los cuerpos son iguales en un punto dado del campo gravitatorio. En particular, adoptando la igualdad (3.10a) y llamando **g** a esa aceleración tenemos:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \ldots = \mathbf{g} = \mathbf{G} \qquad (3.11)$$

El campo gravitatorio viene así expresado por la aceleración que en ese punto tienen todos los cuerpos. El hecho experimental de que la aceleración gravitatoria es la misma para todos los cuerpos en un mismo punto de la tierra, independiente de su masa, es conocido desde hace mucho. Constituye la "ley de caída de los cuerpos". De esta manera, la ley de la caída de los cuerpos pasa a ser una verificación de la proporcionalidad entre masa inercial y masa gravitatoria.

La fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo se llama "peso" del mismo. Formalmente deberíamos poner (3.7):

$$\mathbf{P} = \mu\,\mathbf{G}$$

Pero debido a la igualdad (3.10a) vale:

$$\mathbf{P} = \mu\,\mathbf{G} = m\mathbf{g} \qquad (3.12)$$

Como el campo gravitatorio **G**, y con ello la aceleración **g**, varía de lugar en lugar, el peso de un cuerpo no será una cualidad inherente del mismo.

Comparando los pesos de dos cuerpos en un mismo lugar de la tierra, podemos obtener el cociente de sus masas:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}$$

De ahora en adelante, debido a la igualdad (3.10a), no distinguiremos más entre masa inercial y masa gravitatoria: simplemente hablaremos de "masa de un cuerpo".

Con la fuerza de atracción terrestre se puede definir un patrón de fuerza, o sea, adoptar la fuerza como magnitud *independiente*. Se toma, como unidad de fuerza, el peso del kilogramo patrón (o sea el peso del cuerpo de platino, archivado en Sèvres, París) en condiciones "normales" de aceleración de gravedad (a 45° de latitud, nivel del mar, etc.), o sea, para $g = 9{,}80665$ m seg^{-2}. La unidad de fuerza así definida es el "kilogramo fuerza" (nombre poco afortunado que induce a confusión). En ese sistema, la masa es una magnitud dependiente. La unidad de masa es aquella que bajo la acción de 1 kilogramo fuerza sufre una aceleración de 1 m/seg^2. Según su definición, 1 kilogramo fuerza = 9,80665 Newton.

Volvamos a la constante universal de gravitación: su valor experimental, en el sistema cgs, es de

$$\gamma = 6{,}67\ 10^{-8}\ \text{dinas cm}^2\ \text{g}^{-2} \quad (\text{g}^{-1}\ \text{cm}^3\ \text{seg}^{-2})$$

Éste es un valor muy pequeño.

Respecto del campo gravitatorio, se comprueba que es *aditivo*: el campo gravitatorio de varias masas es la suma vectorial de los campos gravitatorios correspondientes a las masas individuales. De esta manera se puede demostrar que para la Tierra (de forma aproximadamente esférica, de radio $R \cong 6.380$ Km), el campo gravitatorio en un punto de la superficie, o exterior, es igual al campo que tendría un cuerpo puntual colocado en el centro de la Tierra, de masa igual a la masa de la Tierra. Por lo tanto, teniendo en cuenta la (3.8) y las consecuencias de la igualdad (3.10a), tenemos, para la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre:

$$g = \gamma \frac{M_T}{R^2} \qquad (3.13)$$

Para un punto interior de la Tierra, situado a una distancia $r < R$ del centro de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio estará determinada por la fracción $M(r)$ de masa de la Tierra que está dentro del radio r, dada por $M(r) = M_T\, r^3/R^3$ (hemos supuesto densidad constante). El valor de la aceleración de la gravedad en el interior será entonces:

$$g_{\text{int}}(r) = \gamma \frac{M(r)}{r^2} = \frac{\gamma M_T}{R^2}\frac{r}{R} = g\frac{r}{R} \qquad (3.13a)$$

Por lo tanto, la aceleración disminuye linealmente hacia el centro de la Tierra. Es nula en ese punto.

Esta discusión de interacciones gravitatorias puede llevarse en forma análoga al caso de las *interacciones electrostáticas*. Efectivamente, para cuerpos puntuales electrizados, puestos en interacción electrostática en el vacío, se comprueban leyes ideales análogas a las dadas para el caso gravitatorio, con la sola diferencia de que las fuerzas eléctricas pueden ser atractivas y repulsivas. En forma totalmente análoga al caso de la masa gravitatoria, se define la *carga eléctrica* de un cuerpo, la cual, empero, puede ser positiva o negativa. El *campo eléctrico* se introduce en forma idéntica al campo gravitatorio, y también se comprueba que para cargas puntuales varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (ley de Coulomb). La constante universal que aparece en forma análoga a la constante universal de gravitación es la mal llamada "constante dieléctrica del vacío" ε_0. La gran diferencia con las interacciones gravitatorias reside en el hecho de que para las interacciones electrostáticas *no existe* la proporcionalidad entre carga eléctrica y masa inercial. Por ello, las aceleraciones de los cuerpos en interacción eléctrica dependen de sus masas inerciales. Por último, la interacción electrostática entre dos cargas eléctricas depende del medio interpuesto. Esto no sucede con las interacciones gravitatorias. Por ejemplo, es imposible construir una "pantalla", similar a la "Caja de Faraday" del caso eléctrico, con la cual anular el campo gravitatorio en una región dada.

d) Tiro en el vacío

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación. Consideremos el "tiro en el vacío" en las vecindades de la superficie de la Tierra. Es el movimiento de un

proyectil lanzado desde un punto O con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y un ángulo α respecto del plano horizontal. Este proyectil está sujeto a la fuerza de atracción gravitacional $m\,\mathbf{g}$, despreciándose el rozamiento del aire. Eligiendo un sistema de coordenadas conveniente (x, z horizontales, y vertical), tendremos para la ecuación vectorial

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

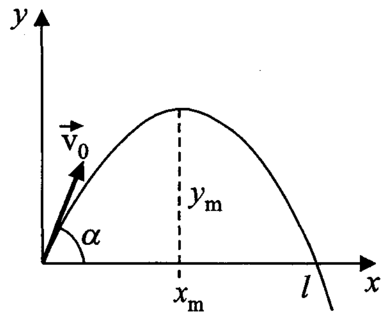
las tres ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = (\text{cte.})$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad \text{O sea, integrando} \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} - g\,t = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\,t$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dz}{dt} = v_z = v_{0z} = 0$$

De las ecuaciones para $\mathbf{v}$ deducimos que el movimiento es plano. Para la posición en el plano $x\,y$ vale:



$$x(t) = v_0 t \cos\alpha\, t$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

La ecuación de la trayectoria $y = y(x)$ la obtenemos eliminando t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad \text{por lo tanto} \qquad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2,$$

ecuación de una parábola (llamada parábola de tiro).

El punto de altura máxima alcanzada se obtiene de la condición

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \operatorname{tg}\alpha - g\frac{x_m}{v_0^2 \cos^2\alpha} \qquad \text{o sea,} \quad x_m = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}2\alpha$$

El valor de y correspondiente resulta, reemplazando el valor de x:

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\alpha$$

Obsérvese que para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (tiro vertical hacia arriba) obtenemos el mismo resultado que en el caso rectilíneo (ver página 53). Ese valor $v_0^2/2g$ es además la altura máxima absoluta alcanzable para una velocidad inicial dada; para todo otro ángulo, sen$\alpha < 1$, la altura alcanzable será menor. El instante t_m en el que alcanza el máximo es:

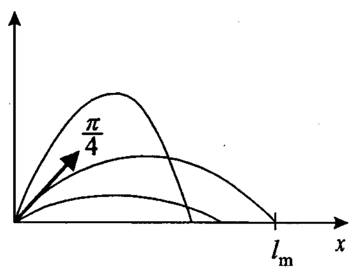
$$t_m = \frac{x_m}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

En ese instante, la componente de la velocidad en la dirección vertical, v_y, es nula. Consideremos la distancia l a la cual el proyectil toca tierra. Se obtiene resolviendo $y = y(x) = 0$, o sea:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\ x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 = x \left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x \right) = 0$$

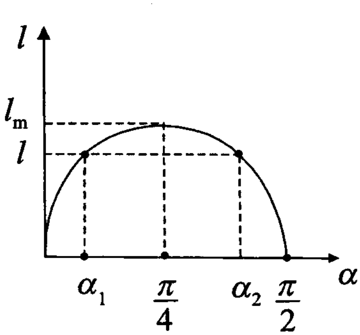
La solución x = 0 es trivial, pues corresponde al instante inicial. La otra solución es

$$x = l = \frac{2v_0^2}{g} \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha = 2x_m$$

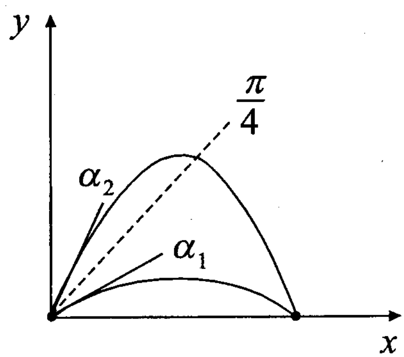


Para una misma velocidad inicial v_0, el alcance máximo corresponde al ángulo para el cual $\operatorname{sen}2\alpha = 1$ (valor máximo que puede tener la función seno). O sea:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$



El valor del alcance máximo es $l_m = v_0^2/g$ (esto es, el doble que la altura máxima alcanzable para la misma velocidad inicial v_0).



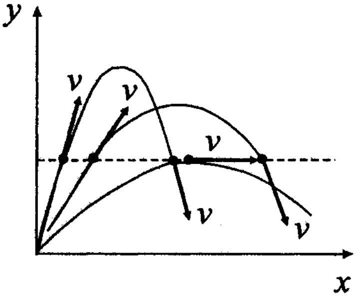
Obsérvese la dependencia del alcance l como función del ángulo de tiro α. Según el gráfico, se puede llegar con un proyectil a un punto l ($< l_m$), con *dos* ángulos de tiro α_1 y α_2, soluciones de $\operatorname{sen}2\alpha = g\,l/2v_0^2$. Efectivamente, si α_1 es uno de estos ángulos, $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha_1$ también es solución:

$$\text{sen}2\alpha_2 = \text{sen}2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \text{sen}(\pi - 2\alpha) = \text{sen}2\alpha_1$$

La posibilidad de llegar por dos caminos diferentes al mismo punto tiene importancia en balística.

Otra observación importante: la velocidad (en módulo) del proyectil depende exclusivamente de la altura, para cualquier trayectoria (para una misma velocidad inicial):

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\text{sen}\alpha - g\,t)^2 = v_0^2 - 2\,g\left(v_0 t\ \text{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g\, t^2\right) = v_0^2 - 2g\ y$$



Obsérvese que la cantidad $v^2 + 2g\ y\ \left(= v_0^2\right)$ es una constante de movimiento (pues es constante en el tiempo, dependiendo sólo del estado inicial). Multiplicando por ½ m obtenemos la cantidad

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + m\ g\ y = E$$

que más adelante definiremos como energía total, que es una constante de movimiento general.

Veamos finalmente cómo se determina el ángulo de tiro α en función de la posición x, y del blanco, para una dada velocidad inicial del proyectil (problema fundamental de la balística). De la relación

$$y = x\ \text{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\ \cos^2\alpha} x^2$$

debe despejarse α en función de x, y. Teniendo en cuenta que $\cos^2\alpha = 1/\left(1 + \text{tg}^2\alpha\right)$, tenemos:

$$y = x\ \text{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\ x^2}{v_0^2}\left(1 + \text{tg}^2\alpha\right)$$

Ésta es una ecuación de segundo grado en $\text{tg}\alpha$, con la solución

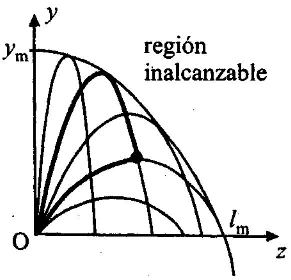
$$\text{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gx} \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{v_0^2 y}{g}}$$

Las dos soluciones corresponden a los tiros por "elevación" y "rasante", respectivamente (curvas en grueso, en el dibujo). Obsérvese que hay toda una región del plano x, y para la cual la raíz, y con ello $\text{tg}\alpha$, es imaginaria. Esto quiere decir físicamente que esos puntos no son alcanzables por el proyectil. Esa región está definida por la relación

$$\frac{v_0^4}{g^2} - x^2 - \frac{2v_0^2}{g} y < 0$$

O sea

$$y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{v_0^2}$$



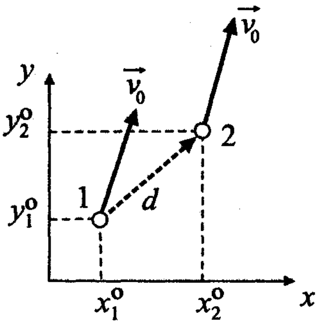
Para cada valor de x, todos los puntos que están por encima de $y = v_0^2/2g - gx^2/2v_0^2$ son inalcanzables. Esta relación representa la ecuación de la curva límite (una parábola).

Veamos ahora una cuestión de gran importancia: supongamos dos cuerpos lanzados simultáneamente con el mismo vector velocidad inicial, desde dos puntos diferentes (x_1^0, y_1^0) y (x_2^0, y_2^0). Vamos a demostrar que la distancia entre los dos cuerpos permanece invariable durante su movimiento. El vector **d** que va del cuerpo 1 al cuerpo 2 tiene por componentes $d_x = x_2 - x_1$ y $d_y = y_2 - y_1$. Restando las expresiones correspondientes:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^0 + v_0 \cos\alpha\, t \\ x_1 &= x_1^0 + v_0 \cos\alpha\, t \end{aligned} \qquad \text{o sea} \qquad d_x = x_2 - x_1 = x_2^0 - x_1^0 = d_x^0 \quad (= \text{cte.})$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_2^0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, gt^2 \\ y_1 &= y_1^0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, gt^2 \end{aligned} \qquad \text{o sea} \qquad d_y = y_2 - y_1 = y_2^0 - y_1^0 = d_y^0 \quad (= \text{cte.})$$

Por lo tanto, no sólo la distancia $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ permanece constante sino la dirección y el sentido del vector **d**.



Obsérvese que la razón física por la cual la posición relativa de los cuerpos no se modifica reside en la igualdad (o, mejor dicho, proporcionalidad) entre masa inercial y masa gravitacional. Recuérdese que si m y μ no fuesen proporcionales, la aceleración de la masa m_2 sería diferente a la de la masa m_1 y el término $1/2\, gt^2$ no se cancelaría al hacer la diferencia $y_2 - y_1$.

Veamos qué implica esto físicamente. Supongamos un hombre dentro de un proyectil lanzado al espacio. El hombre sostiene dos cuerpos de masas m_1 y m_2 (en reposo respecto de él); sobrevivido el momento del lanzamiento, los suelta (abriendo las manos). ¿Qué pasa con los dos cuerpos? Como ellos tuvieron la misma velocidad que el hombre y el proyectil (sólo ocuparon distinta posición inicial), su distancia relativa entre sí, al hombre y a la cabina del proyectil, se mantiene constante. ¿Qué quiere decir esto? El observador que viaja en un proyectil lanzado al espacio "no siente peso": él mismo, y todo objeto en reposo en la cabina, "flotará en el espacio" (porque todos pueden ser considerados como

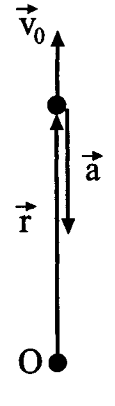
"proyectiles individuales" lanzados con la misma velocidad inicial, manteniendo entonces distancias relativas invariables).

Obsérvese que un caso particular de esto es un ascensor en caída libre (en el vacío). Corresponde a la condición $v_0 = 0$. Nuestra "sensación" en un ascensor que arranca hacia abajo (o un avión en un "pozo de aire") es precisamente la de falta momentánea de peso. Como el ascensor no cae en forma acelerada indefinidamente (y el avión tampoco) nuestro peso "vuelve" a las pocas fracciones de segundo cuando cesa el movimiento acelerado hacia el centro de la Tierra.

Si un avión sigue por un tiempo determinado una trayectoria de parábola de tiro, con la velocidad correcta en cada punto, los pasajeros en el interior no "sentirán su peso"; es decir, cualquier objeto en reposo con respecto del avión "flotará" en el aire, manteniendo las distancias relativas entre sí constantes (por ser cada uno de ellos un proyectil "lanzado" con la misma velocidad inicial). Antes de los vuelos orbitales tripulados se utilizaba este método para estudiar las reacciones fisiológicas y psicológicas de una persona cuando se encuentra "libre" de la atracción gravitatoria. Pero un avión sólo puede mantener una trayectoria balística por pocos segundos. Efectivamente, supongamos que un avión puede volar a una velocidad máxima de 500 Km/h cuando remonta a 30° sobre la horizontal. La duración de un vuelo "libre de gravedad", o sea, un vuelo sobre una porción de una parábola de tiro (con la velocidad correcta), hasta volver a la altura inicial, estará dada por la expresión $t = 2v/g\,\mathrm{sen}\alpha$, que para el caso en cuestión valdría 14 segundos.

e) Tiro vertical a gran distancia

Consideremos ahora el caso de un cuerpo de masa m lanzado desde la Tierra (masa M) verticalmente hacia arriba, a gran distancia. Seguiremos despreciando el rozamiento del aire. En este caso habrá que tener en cuenta la variación del campo gravitatorio con la distancia. La ecuación de movimiento sigue de (3.9) y se puede escribir en una sola dimensión (el radio vector):



$$f = m\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma\frac{mM}{r^2}$$

O sea

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma\frac{M}{r^2}$$

De acuerdo con la expresión (3.13) para la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre tenemos:

$$|a| = \gamma\frac{M}{r^2} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad (3.14)$$

Esta fórmula es muy conveniente, porque nos da la aceleración de la gravedad a la distancia r, sin necesidad de recordar los valores de la constante de gravitación γ, y la masa M de la Tierra (g y $R = 6380$ Km son cifras más familiares). De paso, es útil recordar el valor de

$$\gamma\, M = g\, R^2 = 4\, 10^{20}\ \mathrm{cm^3/seg^2} \qquad (3.15)$$

Estamos en presencia del caso de la aceleración en función del espacio. Procedemos de acuerdo con lo visto en el capítulo 2.e:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\gamma \frac{M}{r^2}$$

O sea,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -\gamma\, M \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = \gamma\, M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Obsérvese que, multiplicando por m, aparece nuevamente una cantidad que es integral de movimiento:

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma\, Mm}{r}\right] = \left[\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma\, Mm}{r_0}\right] = E = \text{cte.}$$

independiente del tiempo, determinada por el estado inicial.

Entonces:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma\, M\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

Se ve que para $r > r_0$, $v < v_0$ y viceversa. Si

$$2\gamma\, M\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) > v_0^2$$

o sea, si

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2\gamma\, M}$$

el radicando es negativo y v es imaginaria. Esto se interpreta diciendo que el móvil no puede llegar más allá de

$$r_m = \frac{1}{\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{v_0^2}{2\gamma\, M}}$$

Ésta es la distancia máxima al centro de la Tierra, alcanzable por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba. Y viceversa, para llegar a una distancia prefijada r, un proyectil lanzado desde r_0 debe tener una velocidad inicial, para la cual

$$v_0 > v_{\min} = \sqrt{2\gamma\, M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

Por ejemplo, si el lugar de lanzamiento es la superficie de la Tierra ($r_0 = R$), la velocidad mínima necesaria para llegar a una distancia r del centro de la Tierra es

$$v_{\min} = \sqrt{2g\, R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

Para distancias de 300 Km de la superficie terrestre (órbita típica de un satélite tripulado), de 10.000 Km y de 60 radios terrestres (Luna) del centro de la Tierra, obtenemos los valores

$$v_{min\ 300\,Km} = 7{,}5 \text{ Km/seg} \quad v_{min\ 10.000\,Km} = 8{,}9 \text{ Km/seg} \quad v_{min\ 60\,R} = 11{,}1 \text{ Km/seg}$$

La velocidad mínima para escapar totalmente de la atracción gravitatoria terrestre se obtendrá haciendo $r \to \infty$:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\gamma\, M}{R}} = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ Km/seg} \qquad (3.16)$$

El doble signo de la raíz en la expresión general para v merece algo de consideración. Significa que, para un mismo valor de r, el móvil puede tener una velocidad positiva y una negativa: la primera corresponde al movimiento de subida, la segunda a la caída hacia la Tierra. Se deduce que la velocidad con que pasa por un mismo punto es la misma en módulo, sea en movimiento de subida o de bajada.

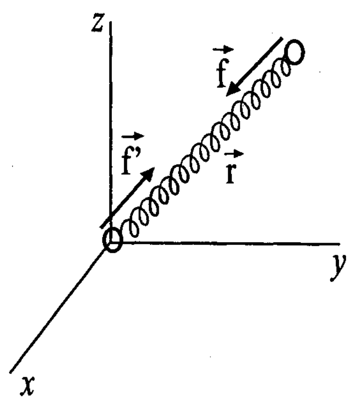
Para hallar r y v en función del tiempo hay que integrar la relación

$$\frac{dr}{dt} = v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma\, M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

o sea

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{v_0^2 - 2\gamma\, M\left(1/r_0 - 1/r'\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$$

f) Interacciones elásticas, reacciones de vínculo y fuerzas de frotamiento



Estudiemos ahora otro tipo de interacción, de importancia fundamental para la mecánica. Se trata de la interacción *elástica*. Primero daremos su definición "por decreto": dos cuerpos puntuales están en interacción elástica cuando la fuerza de interacción es

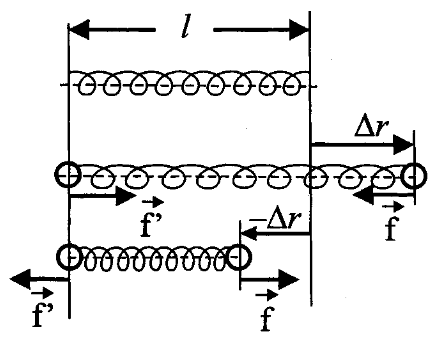
$$\mathbf{f} = -k\,\mathbf{r} \qquad (3.17)$$

donde **r** es el radiovector que ubica el cuerpo sobre el cual actúa la fuerza respecto del otro. Obsérvese que se trata de una interacción atractiva. La constante k (positiva) es independiente de los dos cuerpos y sólo depende del mecanismo particular de interacción. Un ejemplo (ideal) de interacción elástica es el de dos masas vinculadas con un resorte estirable indefinidamente y de longitud propia nula. En este caso, la constante k depende exclusivamente del resorte, y se llama "constante elástica" del resorte.

Obsérvese que en una interacción elástica la aceleración de un cuerpo es:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} = -\frac{k}{m}\mathbf{r}$$

dependiendo por lo tanto de la masa del cuerpo.



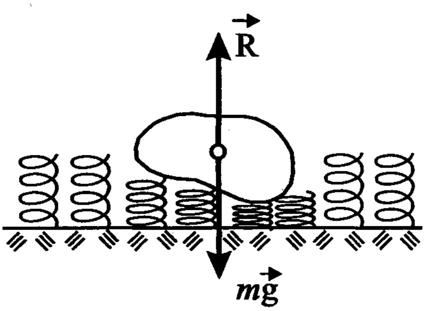
Para realizar una interacción elástica en la práctica hay que tener en cuenta que un resorte real siempre tiene una longitud propia finita, l. Vinculando dos masas con un resorte así, se comprueba que la fuerza elástica con que interactúan vale

$$\mathbf{f} = -k\,\Delta\mathbf{r} \qquad (3.17a)$$

donde $\Delta\mathbf{r}$ es la variación de la longitud del resorte, de módulo $\Delta r = r - l$. De esta manera, la interacción es atractiva si $r - l > 0$ (resorte estirado), y repulsiva si $r - l < 0$ (resorte comprimido). En el caso real, la relación (3.17a) sólo vale para elongaciones Δr pequeñas.

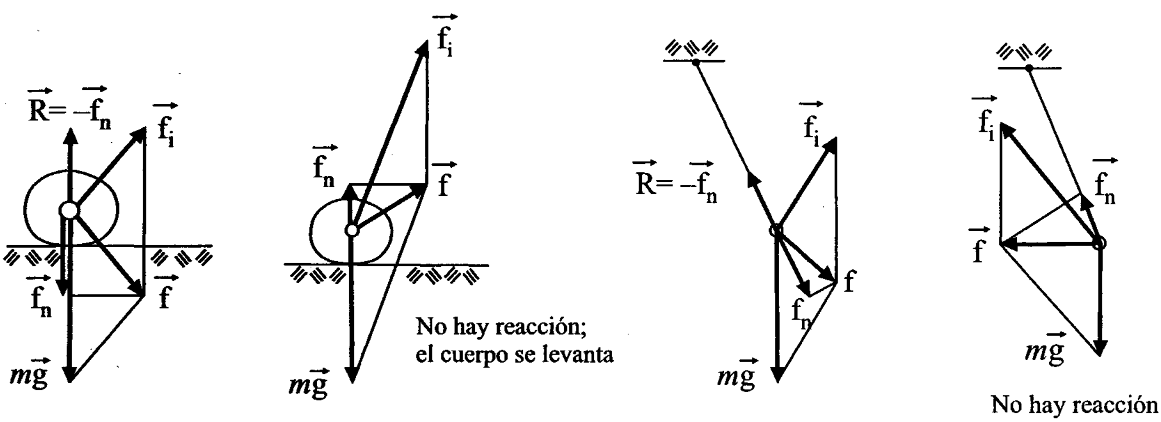
Las interacciones elásticas son fundamentales para el estudio de la deformación de los cuerpos (teoría de la elasticidad, capítulo 6).

La propiedad fundamental de la interacción elástica, de que la fuerza de interacción sólo depende de la configuración del mecanismo que provee la interacción (constante k y distancia r), y *no* de la masa y demás propiedades de los cuerpos en interacción (como sucede en el caso gravitatorio), permite "calibrar" las interacciones elásticas (un resorte, por ejemplo) en una forma unívoca (a través de la relación $f = k\,\Delta r$, y utilizarlas en la medición estática de otras fuerzas de interacción desconocidas (página 69). Un resorte calibrado se denomina "dinamómetro".



Sea ahora un cuerpo apoyado en una mesa, en reposo. El hecho de que está en reposo pese a estar sujeto a la interacción gravitatoria con la Tierra significa que debe haber otra interacción que anule la primera (3.4). Esa interacción es del tipo elástico y tiene su origen en la deformación elástica de la mesa. En otras palabras, podemos imaginarnos al cuerpo como apoyado sobre un "colchón de resortes" (provisto por moléculas de la mesa), que se comprime hasta que la fuerza elástica (repulsiva) anule la acción de la fuerza gravitatoria. Esa fuerza elástica se llama *reacción de vínculo* **R**. Lo mismo sucede con un cuerpo suspendido de un hilo. En este caso, las moléculas del hilo se comportan como resortecitos que se estiran hasta que la fuerza correspondiente (atractiva) equilibra la fuerza de la gravedad.

En general, cada vez que un sistema físico (vínculo) limita la posibilidad de movimiento de un punto material, aparece la reacción de vínculo que (siempre que lo resista el material) equilibra la componente normal al vínculo de las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo (siempre que esa componente normal tenga el sentido correcto como para que el vínculo pueda ejercer reacción).

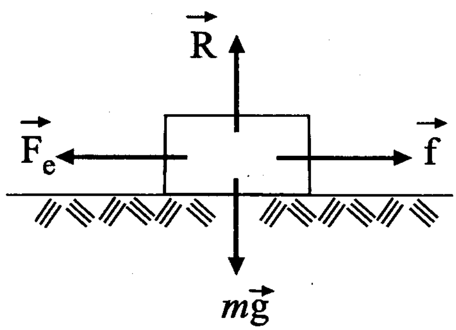


Cuando hay un vínculo, la ecuación de movimiento de un cuerpo puntual estará dada por la ecuación

$$\mathbf{f} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

donde **f** es la resultante de todas las fuerzas de interacción y **R** es la resultante de las fuerzas de vínculo, la cual siempre tiene el valor adecuado como para que la aceleración **a** del cuerpo sea compatible con el vínculo en cuestión (o sea, tal que el cuerpo no lo atraviese). Obsérvese que las reacciones de vínculo no se pueden modificar independientemente, sino que dependen enteramente de las otras fuerzas aplicadas o del movimiento del cuerpo en sí. Esto último ocurre, por ejemplo, en el caso de un tren que entra en una curva: aparece una reacción de vínculo en las vías que le imparte la fuerza centrípeta necesaria mv^2/ρ. Obsérvese finalmente que las reacciones de vínculo siempre son perpendiculares al vínculo.

Veamos finalmente otro tipo de fuerzas importante. Consideremos, por ejemplo, un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal rugosa. Estando en reposo, el peso $m\mathbf{g}$ se equilibra con la reacción de vínculo **R**. Si ahora ejercemos una pequeña fuerza **f** tangencial a la superficie del vínculo, observamos experimentalmente que el móvil continúa estando en reposo. Eso quiere decir que debe haber otra fuerza $\mathbf{F}_e$ (además de **R**, $m\mathbf{g}$ y **f**) que es responsable de que la aceleración sea nula:

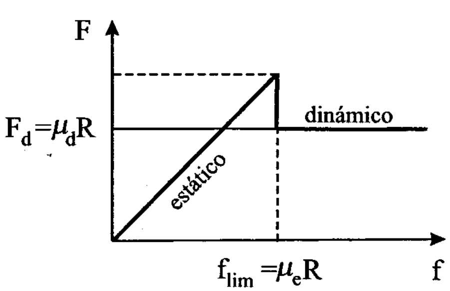


$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_e = m\mathbf{a} = 0$$

Por lo tanto, dado que $m\mathbf{g} + \mathbf{R} = 0$ por separado, en todo momento debe ser

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{f}$$

De nuevo tenemos una fuerza que no puede ser modificada independientemente, sino que en todo momento depende de otra fuerza exterior aplicada (la **f**). Esta fuerza tiene relación con las rugosidades en las superficies de contacto y se llama fuerza de *frotamiento estático.*



Todo esto vale sólo hasta cierto límite máximo del valor de f, límite que depende del contacto entre las superficies del cuerpo y del vínculo. Se comprueba experimentalmente que a partir de ese límite, o sea, en cuanto $f > f_{\lim}$, $\mathbf{F}_e$ salta bruscamente a otro valor menor $\mathbf{F}_d$ poniéndose, por lo tanto, el cuerpo en movimiento. La fuerza $\mathbf{F}_d$, valor al que salta la fuerza de frotamiento cuando el cuerpo se pone en movimiento, se llama fuerza de *frotamiento dinámico*. Esta fuerza es siempre opuesta al movimiento, o sea, al vector velocidad **v**. Mientras que $\mathbf{F}_e$ está totalmente determinada por **f** (o la componente tangencial al plano, si **f** no está contenida en él), $\mathbf{F}_d$ es independiente de **f**. Incluso, si $\mathbf{f} = 0$, actuará la fuerza $\mathbf{F}_d$, con tal de que esté el cuerpo en movimiento. Representando el módulo de la fuerza de frotamiento en función de la fuerza exterior tangencial f, tenemos lo que muestra la figura.

Para el valor de $f_{\lim}$ se observa experimentalmente que:

$$f_{\lim} = \mu_e R \quad (\mu_e < 1) \qquad (3.18a)$$

donde R es la reacción de vínculo. μ_e es el coeficiente de frotamiento estático, que depende de los materiales en contacto, del pulido de sus superficies, etc.

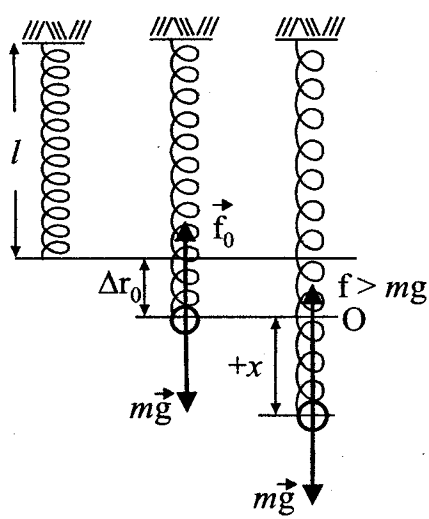
Para el módulo de la fuerza de frotamiento dinámico F_d se observa experimentalmente.

$$F_d = \mu_d R \quad (\mu_d < \mu_e) \qquad (3.18b)$$

μ_d es el coeficiente de frotamiento dinámico. El salto brusco de la fuerza de frotamiento del caso estático al dinámico conduce a efectos curiosos (saltitos del dedo frotado contra el pizarrón, chillido de los frenos, etc. Véase el ejemplo en 3.j).

Digamos unas palabras finales sobre procesos de interacción. La física actual trata de comprender todos los procesos físicos y, con ello, la evolución de todo sistema, en términos de un número mínimo de tipos de interacciones elementales entre las llamadas partículas elementales. Esas interacciones son sólo cuatro y se distinguen fundamentalmente por su "intensidad" (dada en cada caso por una constante universal, de significado equivalente a la constante de gravitación y a la constante ε_0 electrostática). Son las *interacciones fuertes* (responsables de las fuerzas entre protones y neutrones, o sea, de las fuerzas nucleares); las *interacciones electromagnéticas* (responsables de las fuerzas entre las cargas y los momentos magnéticos de las partículas elementales); las *interacciones débiles* (responsables de la inestabilidad del neutrón y de otras partículas elementales), y, finalmente, las *interacciones gravitatorias* (las más débiles de todas). De estas cuatro interacciones, la gravitatoria se distingue por dar aceleraciones independientes de la masa de los cuerpos interactuantes. Para la física "macroscópica" sólo subsiste la acción de las interacciones electromagnéticas y gravitatorias. Toda otra interacción, como la elástica, se reduce a una interacción electromagnética en el dominio molecular.

g) Movimiento oscilatorio armónico



Sea el caso de una masa suspendida de un resorte de longitud propia l y constante elástica k. La elongación Δr_0 correspondiente al equilibrio entre la fuerza elástica y la gravitatoria estará dada por la relación $mg = k\Delta r_0$. Elijamos la posición de equilibrio como origen, y apartemos la masa en un valor x contado positivo hacia abajo. La fuerza total sobre el cuerpo m será ahora

$$f = mg - k(\Delta r_0 + x) = -kx$$

O sea, tendrá una aceleración:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

La ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (3.19)$$

es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal. Su solución es la función $x = x(t)$, que representa el movimiento de la masa suspendida del resorte. Para resolverla escribimos como en otras oportunidades:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Entonces:

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right)=-\frac{k}{m}x\,dx$$

O sea, integrando:

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2=-\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(x^2-x_0^2\right)$$

x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial. Multiplicando por m y agrupando términos, vemos que

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2=E=\text{cte.}$$

independiente del tiempo, dependiente sólo del estado inicial.

Despejando la velocidad, tenemos

$$v=\pm\sqrt{v_0^2+\frac{k}{m}\left(x_0^2-x^2\right)}$$

Nuevamente aparece una raíz cuadrada. Si $x^2 > x_0^2 + m/k\,v_0^2$, la raíz es imaginaria. Por lo tanto, el movimiento sólo puede tener lugar entre los límites

$$-\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}\le x\le+\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}$$

La distancia máxima a la que se aparta el cuerpo de la posición de equilibrio se llama elongación máxima o *amplitud*:

$$A=\left|x_{\max}\right|=\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}$$

El doble signo en la expresión de la velocidad indica que la velocidad del móvil cuando pasa por el punto x siempre es la misma en módulo, pudiendo ser en uno u otro sentido del eje x. Para hallar $x(t)$ es necesario integrar una vez más:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}\left(x_0^2 - x^2\right)}$$

O sea:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{v_0^2 + k/m\left(x_0^2 - x'^2\right)}} = t - t_0$$

Para resolver la integral factoreamos k/m en la raíz y agrupamos términos en la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{v_0^2\, m/k + \left(x_0^2 - x'^2\right)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(t - t_0\right)$$

Introduciendo la amplitud A, tenemos;

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(t - t_0\right)$$

La integral vale, según tablas,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} = \text{arc sen}\,\frac{x}{A} - \text{arc sen}\,\frac{x_0}{A}$$

O sea:

$$\text{arc sen}\,\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(t - t_0\right) + \text{arc sen}\,\frac{\mathrm{x}_0}{\mathrm{A}}$$

Si introducimos la *fase inicial* $\varphi = \text{arc sen}\,\mathrm{x}_0/A$ y la *pulsación* $\omega = \sqrt{k/m}$, tenemos finalmente:

$$x = A\,\text{sen}\left[\omega\left(t - t_0\right) + \varphi\right] \qquad (3.20)$$

Ésta es la ecuación del movimiento *oscilatorio armónico* y representa la solución general de la ecuación diferencial (3.19). Un sistema como el considerado, que obedece a esta ecuación, se denomina "oscilador lineal".

Para la velocidad tendremos

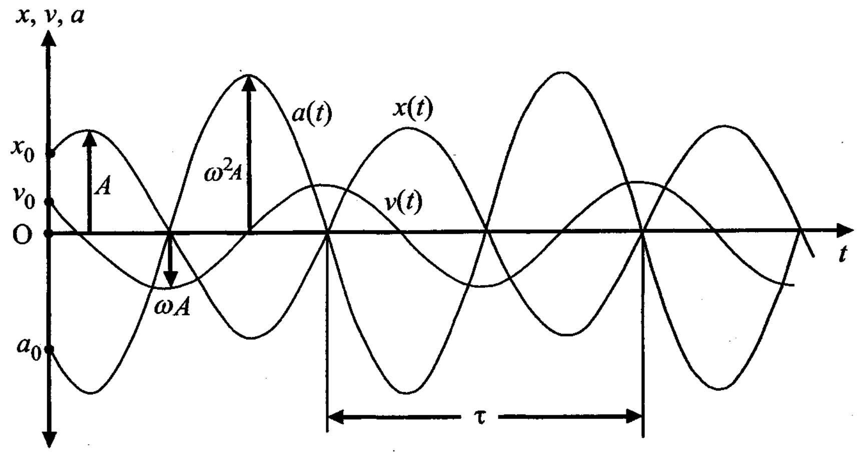
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos\left[\omega(t - t_0) + \varphi\right] = A\omega \,\text{sen}\left[\omega(t - t_0) + \varphi + \frac{\pi}{2}\right]$$

Vemos que la velocidad también varía sinusoidalmente con el tiempo, con una amplitud $v_{max} = \omega A$. La función sinusoidal está desfasada (adelantada) en $\pi/2$ respecto de x. La velocidad es máxima cuando la elongación es nula y viceversa.

Para la aceleración obtenemos:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \,\text{sen}\left[\omega(t - t_0) + \varphi\right] = A\omega^2 \,\text{sen}\left[\omega(t - t_0) + \varphi + \pi\right]$$

El valor máximo de la aceleración es $a_{max} = \omega^2 A$; la función sinusoidal está ahora adelantada en π respecto de la elongación. De esta manera, la aceleración es máxima cuando la elongación es máxima, pero de sentido opuesto. Obsérvese que se cumple la relación original $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x = -k/m\,x$. La representación gráfica de las tres funciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ es la siguiente:



Analicemos ahora los parámetros ω, A y φ que intervienen en la descripción del movimiento oscilatorio armónico. En relación a la pulsación ω, podemos introducir otra cantidad, el *período* τ del movimiento armónico. Es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos pasajes sucesivos del cuerpo, en el mismo sentido, por el mismo punto x. Si t es el instante en que el cuerpo pasa por x, para $t + \tau$ debemos obtener los mismos valores de x y v; o sea:

$$\varpi(t + \tau - t_0) + \varphi = \varpi(t - t_0) + 2\pi + \varphi$$

Ello quiere decir que $\omega\,\tau = 2\pi$, o sea

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3.21)$$

La inversa del período

$$\nu = \frac{1}{\tau} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

se denomina *frecuencia* del movimiento armónico. Representa el número de veces que el móvil pasa por un punto en el mismo sentido, en la unidad de tiempo.

Obsérvese que el período y la frecuencia sólo dependen de la masa del cuerpo y de la constante del resorte, siendo *independientes* de las condiciones iniciales. En otras palabras, son características del proceso de interacción elástica en sí, que no pueden ser influidas desde el exterior. Ésta es una característica esencial de las interacciones elásticas, que las distingue de todas las demás y que juega un papel fundamental en toda la física. Nótese que cuanto mayor sea la masa del cuerpo, menor será la frecuencia (mayor el período, más lenta la vibración). En cambio, cuanto mayor sea k (más "fuerte" el resorte), tanto mayor será la frecuencia.

Analicemos ahora la amplitud $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$. Depende de las condiciones iniciales. En particular, si $v_0 = 0$, la amplitud estará dada directamente por la elongación inicial. En cambio, si la masa parte de la posición de equilibrio ($x_0 = 0$), la amplitud estará determinada por la velocidad inicial en la forma $A = |v_0/\omega|$. En este caso, la velocidad inicial es también la velocidad máxima. Determinada la amplitud, quedan fijados los valores para la velocidad máxima ωA y aceleración máxima $\omega^2 A$.

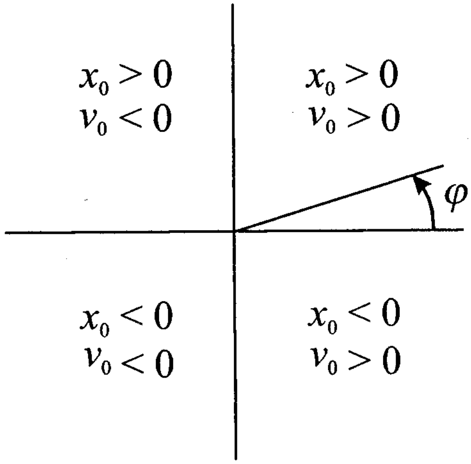
Finalmente corresponde analizar la fase inicial. Ésta se llama así por cuanto fija el valor de la posición inicial:

$$x_0 = A \operatorname{sen}\varphi$$

Para determinar la fase inicial en función de las condiciones iniciales, no basta la relación de arriba, puesto que un ángulo no está fijado por su seno, exclusivamente. Con la expresión de arriba no sabríamos distinguir entre los ángulos φ y $\pi - \varphi$, que tienen el mismo seno. Teniendo en cuenta que esos dos posibles ángulos siempre tienen sus cosenos de signo opuesto, bastará entonces determinar el *signo* del coseno de la fase inicial, para fijarla unívocamente. Ese signo estará dado por el signo de la velocidad inicial, por cuanto

$$v_0 = \omega A \cos\varphi$$

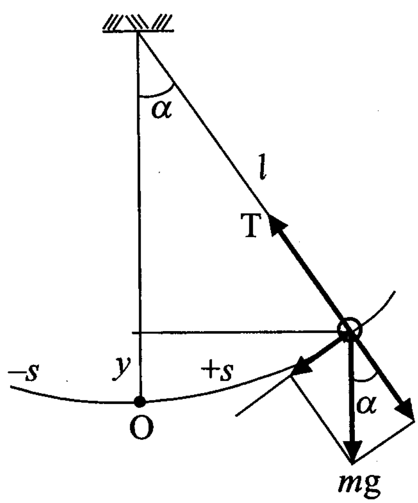
En resumen, el ángulo de la fase inicial estará dado en uno de los cuatro cuadrantes según los signos de la elongación y velocidad inicial:



En particular, si se aparta a la masa en x_0 de su posición de equilibrio, dejándola libre ($v_0 = 0$), tendremos $\varphi = \pi/2$ si $x_0 > 0$ (posición inicial por debajo del punto de equilibrio. Ver dibujo en la página 88), o $\varphi = 3\pi/2$, si $x_0 < 0$ (posición inicial encima de O). Por otra parte, si el cuerpo parte de la posición de equilibrio con cierta velocidad inicial v_0, la fase inicial será $\varphi = 0$, si $v_0 > 0$ (velocidad inicial hacia abajo), y valdrá $\varphi = \pi$ si $v_0 < 0$ (velocidad inicial hacia arriba). Obsérvese que la determinación de la fase inicial depende de la convención sobre el sentido que se ha adoptado para el eje x, y de la forma elegida para la función $x(t)$ (seno o coseno).

Obsérvese finalmente que la fuerza gravitatoria en el interior de la Tierra, correspondiente a la aceleración (3.13a), obedece a una ecuación del tipo "elástico" (3.17), con una constante $k = mg/R$. Si caváramos un túnel (con vacío absoluto) que atravesara el centro de la Tierra, y tiráramos un objeto por él, el cuerpo oscilaría entre las antípodas con un movimiento armónico de período (3.21) $\tau = 2\pi\sqrt{R/g}$, o sea, de 1 hora y 25 minutos, independiente de la masa (¡tardaría sólo 43 minutos en llegar a la antípoda!).

h) Movimiento del péndulo ideal



Estudiaremos ahora el péndulo ideal. Es el movimiento de una masa puntual suspendida de un hilo inextensible de longitud l que oscila en un plano. El punto se moverá sobre un arco de circunferencia de radio l. Las fuerzas que actúan sobre la masa m son su peso $m\mathbf{g}$ y la reacción de vínculo que aquí se llama tensión $\mathbf{T}$ del hilo. Descomponiendo el peso en dos direcciones, paralela y perpendicular al hilo, observamos:

a) En la dirección del hilo (contada positiva hacia arriba):

$$T - mg\cos\alpha = ma_c = m\frac{v^2}{l}$$

ya que la masa *m* ejecuta un movimiento circular, teniendo, por lo tanto, una aceleración centrípeta v^2/l. Esta relación permite hallar la tensión del hilo, una vez que se conozca la velocidad *v*:

$$T = m\left(g\cos\alpha + \frac{v^2}{l}\right)$$

En un péndulo ordinario, que oscila con amplitudes pequeñas, $g\cos\alpha >> v^2/l$, la tensión es prácticamente igual a $mg\cos\alpha$ (muchas veces se comete el error de igualar la tensión *a priori* a $mg\cos\alpha$).

b) En la dirección perpendicular al hilo, o sea, sobre el arco de circunferencia *s* (contado positivo hacia la derecha de la figura):

$$mg\,\text{sen}\,\alpha = ma_t = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

O sea

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\,\text{sen}\,\alpha = -g\,\text{sen}\,\frac{s}{l}$$

o

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\alpha$$

La solución de cualquiera de estas ecuaciones diferenciales da el movimiento de la masa *m*.

Integremos la ecuación en la forma de arriba. Como siempre, hacemos en este caso

$$a = v\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -g\,\text{sen}\,\frac{s_0}{l}$$

Integrando, obtenemos:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gl\left(\cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}\right)$$

multiplicando por m y agrupando

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\frac{s}{l} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl\cos\frac{s_0}{l}$$

independiente del tiempo, dependiente sólo del estado inicial. Observemos que

$$l\cos\frac{s}{l} = l - y$$

donde y es la altura a la que se encuentra la masa m sobre el punto de equilibrio O. Entonces podemos escribir también

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,y = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\,y_0 = E = \text{cte.}$$

Compárese esta relación con la obtenida para el caso dado en 3.e.

Para la velocidad deducimos:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos s/l - \cos s_0/l)}$$

Como en el caso del resorte, hay un valor límite para s (o para el ángulo $\alpha = s/l$), más allá del cual no hay movimiento (dado por el mínimo valor del coseno de α, por debajo del cual la raíz es imaginaria):

$$\cos\alpha_{\max} = \cos\frac{s_{\max}}{l} = \cos\frac{s_0}{l} - \frac{v_0^2}{2gl}$$

El ángulo $\alpha_{\max}$ se llama amplitud de la oscilación del péndulo.Depende de las condiciones iniciales s_0, v_0 y es independiente de la masa del péndulo (sólo interviene l).

Para estudiar el movimiento $s(t)$ o $\alpha(t)$ es necesario integrar

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos s/l - \cos s_0/l)}} = t - t_0$$

Esta integral no se puede resolver en forma cerrada; es una integral elíptica que puede resolverse numéricamente por aproximaciones.

Para un caso especial es posible resolver el problema: cuando las elongaciones son muy pequeñas (amplitudes pequeñas). En ese caso podemos poner

$$\operatorname{sen}\frac{s}{l} \approx \frac{s}{l}$$

y la ecuación diferencial original queda en la forma:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s$$

Es una ecuación de la misma forma que la ecuación del movimiento oscilatorio armónico (3.19). Haciendo en nuestro caso $g/l = \omega^2$, obtenemos una ecuación idéntica, que tiene por solución:

$$s = A\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t - t_0\right) + \varphi\right]$$

con los parámetros

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$A = \sqrt{s_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$

$$\mathrm{sen}\varphi = \frac{s_0}{A} \qquad \cos\varphi = \frac{v_0}{A\omega}$$

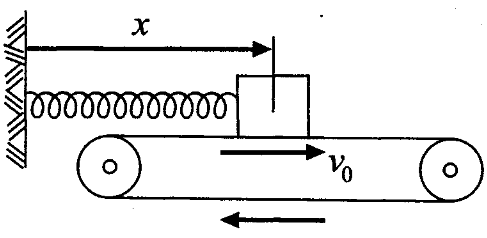
s_0 y v_0 son las condiciones iniciales.

El período de oscilación del péndulo será, por lo tanto:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (3.22)$$

Obsérvese que el período no sólo es independiente de las condiciones iniciales, como en el caso del oscilador armónico, sino que también es independiente de la masa. Depende sólo de la longitud del hilo y de la intensidad del campo gravitatorio. Esta independencia de la masa se debe a la proporcionalidad entre masa gravitatoria y masa inercial. Por todas estas razones, el péndulo es un buen instrumento para medir tiempos. Pero recuérdese que el período sólo es independiente de las condiciones iniciales (de la amplitud), cuando las oscilaciones son tan pequeñas que en todo momento valga la aproximación sen $(s/l) \approx s/l$.

i) Discusión cualitativa de un movimiento con frotamiento



Vamos a tratar el movimiento de un bloque de masa m, apoyado sobre una cinta transportadora con coeficientes de frotamiento estático μ_e y dinámico μ_d, la cual se desplaza con una velocidad constante v_0. Ese bloque está vinculado a una pared con un resorte de constante k y longitud inicial igual a

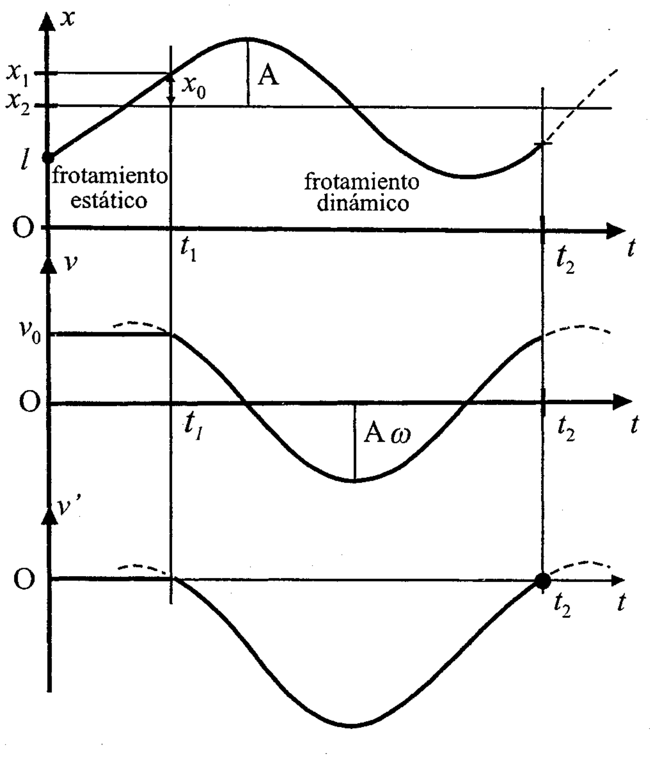
la longitud propia l. En el instante inicial $t = 0$ el bloque está en reposo respecto de la cinta, es decir, tiene la velocidad v_0 respecto de la pared. Haremos una discusión cualitativa del movimiento subsiguiente del bloque.

Al principio, la cinta ejerce una fuerza de frotamiento estático F_e sobre el bloque, igual y de sentido contrario a la fuerza elástica (3.17a) $k(x - l)$, mientras valga la condición $F_e < \mu_e mg$ (3.18a). Por lo tanto, en esas condiciones, la resultante de las fuerzas sobre el bloque es cero, y éste se alejará del origen O con movimiento uniforme y velocidad v_0 (o sea, permanecerá en reposo respecto de la cinta). En el instante t_1, cuando se llega a la condición límite $F_e = \mu_e mg$, o sea, cuando

$$F_e = k(x_1 - l) = \mu_e mg \quad , \quad x_1 = \mu_e g \frac{m}{k} + l \quad , \quad t_1 = \frac{x_1}{v_0}$$

el bloque comenzará a resbalar sobre la cinta. A partir de ese momento actuará sobre el bloque la fuerza de frotamiento dinámico constante $F_d = \mu_d mg$ (3.18b), opuesta a la velocidad de deslizamiento sobre la cinta (velocidad relativa a la cinta), dada por $v' = v - v_0$ (2.14). Esta fuerza tiene su sentido opuesto a la fuerza elástica. En otras palabras, tenemos a partir del instante t_1 una situación totalmente análoga al caso de una masa suspendida de un resorte. Para esa situación habrá una posición de equilibrio x_2 dada por la relación

$$F_d = k(x_2 - l) = \mu_d mg \quad , \quad x_2 = \mu_d g \frac{m}{k} + l$$



Obsérvese que vale siempre $x_2 < x_1$. En resumen, en el instante t_1, el bloque entra en un movimiento armónico alrededor de la posición de equilibrio x_2, con una elongación inicial respecto de esa posición que vale $x_0 = x_1 - x_2 = (\mu_e - \mu_e)\ gm/k$ y una velocidad inicial $+v_0$.

La pulsación de ese movimiento sería

$$\omega = \sqrt{k/m}\,,$$

la amplitud

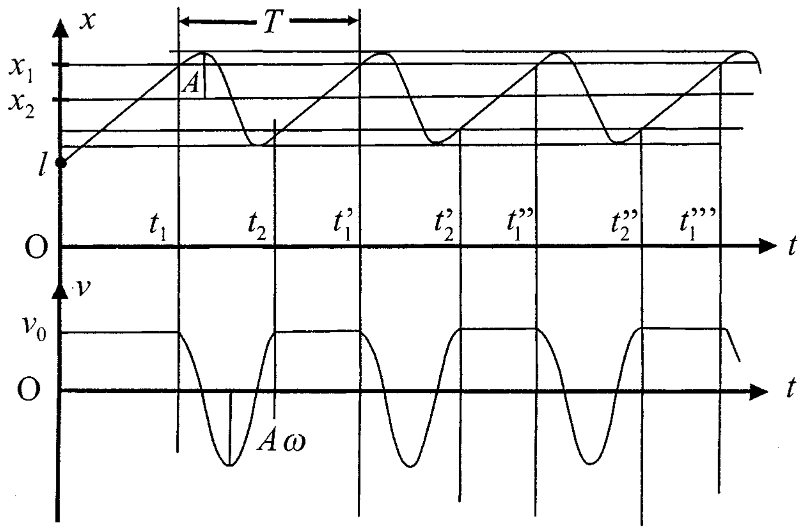
$$A = \sqrt{(\mu_e - \mu_d)^2\ g^2 (m/k)^2 + v_0^2\, m/k}$$

y la fase inicial $\operatorname{sen}\varphi = x/A$, $\cos\varphi > 0$.

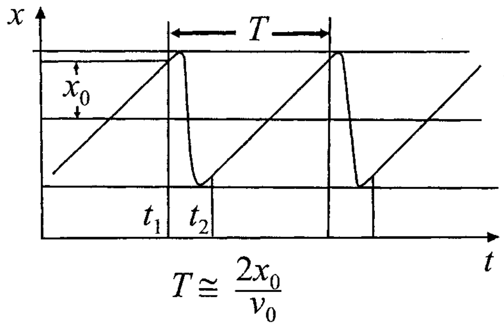
La velocidad del bloque v será también sinusoidal, como se ve en la figura. Pero ese movimiento armónico no continúa indefinidamente. Efectivamente, analizando el gráfico de la velocidad de deslizamiento del bloque respecto de la cinta, $v' = v - v_0$, notamos que en el instante t_2 esa velocidad vuelve a anularse. Eso quiere decir que a partir de ese instante volverán a imperar las condiciones de frotamiento estático: la fuerza de frotamiento volverá a anular la fuerza elástica, y todo el proceso comienza "da capo". Obsérvese que el instante t_2 está dado por las relaciones

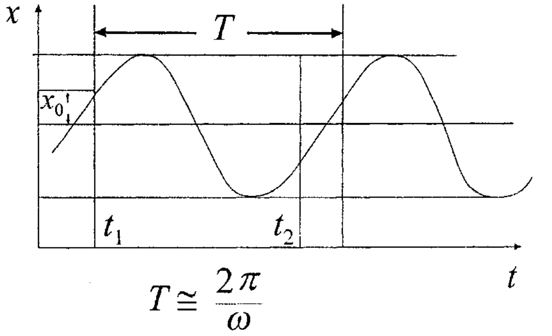
$$v\ (t_2) = v_0 = A\ \ \omega \cos[\omega(t_2 - t_1) + \varphi] \quad , \quad x\ (t_2) = -x_0 = A \operatorname{sen}[\omega(t_2 - t_1) + \varphi]$$

El gráfico completo del movimiento es



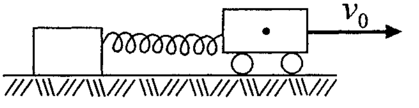
Obsérvese el gráfico *para los casos extremos, en los que el período del movimiento armónico* $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$ *es mucho menor o mucho mayor que el lapso de movimiento rectilíneo* $2x_0/v_0 = 2(\mu_e - \mu_d)\,(g\,m/k\,v_0)$:





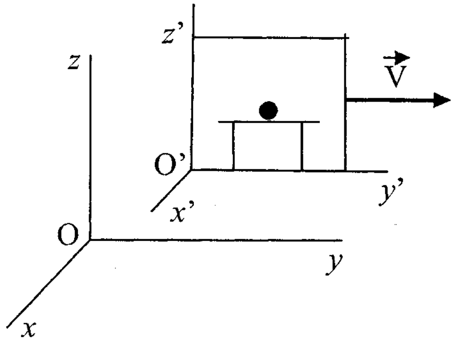
El período de este movimiento oscilatorio *no* armónico está indicado en la figura con el símbolo T. Es fácil calcularlo en función de v_0, μ_e, μ_d, m y k.

Este comportamiento vibratorio se debe físicamente al comportamiento especial de la fuerza de frotamiento (gráfico de la página 87). Obsérvese que el caso discutido arriba es totalmente análogo al caso de un bloque apoyado con frotamiento sobre una mesa, que es tirado por un carrito que se mueve con velocidad constante, al cual el bloque está sujeto con un elástico. Bastará describir todo desde un sistema fijo al carrito, para reproducir completamente las condiciones del problema anterior. El ejemplo del bloque tirado por un resorte es formalmente análogo al caso del dedo frotado contra el pizarrón, al caso de las cintas de freno contra la campana, o al caso de un arco deslizado sobre la cuerda de un violín. Por ello, es un proceso físico importante, pues representa un fenómeno fundamental por el cual se originan vibraciones.



j) Sistemas inerciales y sistemas acelerados

Supongamos un recinto cerrado en el cual se encuentra un observador con una serie de instrumentos mecánicos para verificar las leyes de la Mecánica. En particular, estudia el movimiento de un cuerpo puntual que se desplaza sobre una mesa horizontal, sin fricción. El peso del móvil es anulado por la reacción de la mesa; la resultante de las fuerzas exteriores sobre el cuerpo es, por lo tanto, nula.



Partimos de la hipótesis de que cuando el recinto está en reposo respecto de un sistema dado de coordenadas que llamaremos "sistema fijo", el observador verifica la validez de las leyes de la dinámica. Por ejemplo, comprueba que el cuerpo, inicialmente en reposo, continúa en reposo; o inicialmente en movimiento rectilíneo

uniforme, continúa con ese movimiento rectilíneo uniforme (primera ley de Newton). En general, el observador verifica en estas condiciones la validez de la ley $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$.[10]

Diremos que el sistema fijo, respecto del cual el recinto con el observador está en reposo, es un *sistema inercial.* Con ese nombre se denomina un sistema de referencia en el que se cumple la ecuación de Newton:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

en la cual **f** es la resultante de todas las fuerzas de interacción y reacciones de vínculo.

Supongamos ahora que el recinto se traslada con movimiento rectilíneo uniforme con velocidad **V** respecto del sistema fijo (inercial). Deduciremos que las leyes de Newton (Mach) siguen cumpliéndose para un observador O' en el interior del recinto. Efectivamente, si para este observador el cuerpo apoyado sobre la mesa está en un momento dado en reposo, para un observador en el sistema inercial O, ese cuerpo tendrá la velocidad **V**, igual a la velocidad del recinto y de todos los demás objetos en reposo relativo respecto de él. Como la resultante de las fuerzas de interacción sobre el cuerpo es nula, y como en el sistema O valen las leyes de la dinámica, el observador en ese sistema deducirá que ese cuerpo mantendrá la velocidad **V** indefinidamente. Pero eso quiere decir que continuará en reposo respecto de O'.

Por otra parte, si el móvil tiene inicialmente una velocidad **v**' respecto del observador O' en el recinto, el mismo móvil tendrá una velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ (2.14), respecto de O. Como está libre de fuerzas exteriores, el observador "inercial" deduce que **v** será constante; siéndolo además **V**, lo será **v'**. En resumen, el observador en el sistema inercial *deduce* que en el recinto que se mueve con movimiento uniforme respecto de él se debe cumplir la primera ley de Newton. En general, puede deducir que el observador en el recinto verificará el cumplimiento de la ecuación de Newton (3.5). Por lo tanto, el recinto que se traslada con movimiento rectilíneo uniforme respecto del sistema inercial original también es un sistema inercial. En general, todo sistema que se traslada con movimiento rectilíneo uniforme respecto de un sistema inercial es también inercial. Todos los sistemas inerciales se mueven con movimiento rectilíneo uniforme unos respecto de otros.

Esto tiene una consecuencia física muy importante. El observador en O' no puede revelar físicamente por sí solo el hecho de moverse respecto de O. No puede, por medio de experiencias mecánicas hechas en el interior de su recinto, poner en evidencia el hecho de estar en movimiento respecto de otro sistema inercial.[11] Obsérvese bien que esto no es un principio, sino un hecho que es consecuencia de la definición misma de sistema inercial y de las leyes de Newton. Ahora bien, la experiencia indica que no es posible revelar ese movimiento con *ningún* tipo de proceso físico (electromagnético, termodinámico, nuclear, etc.), extendiendo así el resultado deducido para procesos del tipo mecánico al dominio de toda la física. Éste es el *principio de relatividad.*

10. En realidad, habría que decir que verifica la validez de las leyes de Mach.

11. El hecho de "mirar por una ventana" para poner en evidencia el movimiento no vale, pues implicaría una interacción directa entre los dos sistemas. Lo que se quiere es ver si se puede revelar el movimiento con experiencias hechas *exclusivamente* dentro del sistema O'.

Veamos las relaciones que ligan las coordenadas de un punto en un sistema inercial O' con las coordenadas de ese mismo punto respecto de otro sistema inercial O. Supongamos que el sistema O' se traslada con movimiento uniforme de velocidad **V** respecto de O. De acuerdo con lo visto en el capítulo 2.i, la relación entre los vectores posición será **r** = **r**' + **OO**'. Pero el vector **OO**' vale, en función del tiempo, **OO**' = **OO'**$_0$ + **V** t. Por lo tanto, la relación entre las componentes será:

$$x = x' + x_0 + V_x t$$

$$y = y' + y_0 + V_y t \qquad (3.23a)$$

$$z = z' + z_0 + V_z t$$

A estas relaciones se añade la relación *a priori* evidente para la física clásica, basada en la suposición de que el tiempo transcurrido entre dos sucesos no depende de la velocidad del sistema desde el cual se lo mide,

$$t = t' \qquad (3.23b)$$

Las relaciones (3.23) representan la *transformación de Galileo* que vincula dos sistemas inerciales entre sí. El principio de relatividad se enuncia diciendo que "todas las leyes de la física clásica deben ser covariantes frente a transformaciones de Galileo", es decir, no deben cambiar de forma al hacer la transformación de coordenadas (3.23).

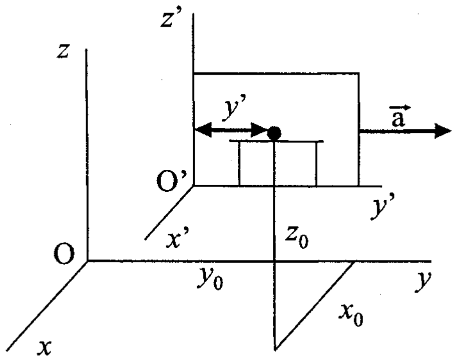
La transformación de Galileo para la velocidad del punto se obtiene derivando las (3.23), obteniéndose precisamente la relación (2.14):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \qquad (3.23c)$$

De esta última relación se deduce que la única velocidad numéricamente igual, medida desde cualquier sistema inercial, sería la infinita (sólo si v' = ✔ será $v = v'$). Sin embargo, el electromagnetismo predice, y la experiencia lo confirma, que es la velocidad de la luz en el vacío ($c = 3\ 10^8$ m/seg) la que es estrictamente invariante, o sea, del mismo valor, cualquiera sea la velocidad del sistema inercial desde el que se la mide. Por lo tanto, la (3.23c) y, con ella, toda la transformación de Galileo (3.23) no pueden ser estrictamente correctas.

El resultado experimental "antiintuitivo" de la invariancia de la velocidad de la luz hizo necesario reemplazar la transformación de Galileo por la "antiintuitiva" transformación de Lorentz (Teoría Especial de la Relatividad). En esta transformación, que, tal como la de Galileo, liga las coordenadas y el tiempo (x', y', z', t') de un sistema inercial O' en movimiento con las de un sistema inercial O en reposo (x, y, z, t), no vale más la relación aparentemente obvia $t = t'$. En otras palabras, desaparece el sentido absoluto del tiempo: dos sucesos que son simultáneos en un sistema ya no serán más simultáneos vistos desde otro sistema que se mueve respecto del primero. Por supuesto que para velocidades pequeñas ($V << c$) la transformación de Lorentz conduce a la transformación de Galileo de la mecánica clásica. Es así cómo el resultado experimental de la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío (ondas electromagnéticas) hizo necesaria

una revolucionaria revisión de los conceptos otrora absolutos y separados del espacio y del tiempo.



Supongamos ahora que el recinto O' parte del reposo con una aceleración uniforme **a**. Para el observador fijo inercial O, un cuerpo inicialmente en reposo sobre la mesa del recinto permanecerá en reposo respecto del sistema inercial O (y no respecto de la mesa), ya que no actúa sobre él resultante alguna (supusimos que no hay fricción). La distancia *y'* del cuerpo a la pared posterior del recinto decrecerá entonces, puesto que la pared se acerca al cuerpo con movimiento uniforme acelerado. Evidentemente tendremos:

$$y'(t) = y_0' - \frac{1}{2} a t^2$$

Por lo tanto, para el observador O' en el recinto acelerado, el cuerpo apoyado sobre la mesa no permanecerá en reposo, sino que iniciará un movimiento uniformemente acelerado con aceleración

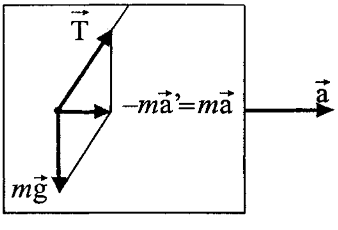
$$\mathbf{a}^* = -\mathbf{a}$$

Deducimos entonces que este observador comprobará que en su sistema O' no valen las leyes de Newton, ya que, por ejemplo, un cuerpo inicialmente en reposo, y para el cual la resultante de las fuerzas de interacción es nula, no permanece en reposo. En general, para él, todo cuerpo libre de fuerzas de interacción sufre un movimiento acelerado. Por lo tanto, para el observador O':

$$\mathbf{f} \neq m\mathbf{a}$$

Un sistema acelerado respecto de un sistema inercial no es más un sistema inercial. Se trata de un *sistema no-inercial*.

Supongamos ahora que el móvil permanece en reposo respecto del observador "no-inercial" O'. Para el observador inercial O ello significa que el móvil se mueve con un movimiento acelerado de aceleración **a**. Como para él valen las ecuaciones de Newton, deduce que debe haber una fuerza de interacción $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ que sea responsable de ese movimiento acelerado (provista por el frotamiento o por la tensión de un hilo al cual está atado el cuerpo, etc.). Efectivamente, el observador no-inercial en el recinto O' comprueba experimentalmente que debe proveer una fuerza $\mathbf{R} = -m\mathbf{a}^*$ $(= f)$ para mantener en reposo cualquier cuerpo de masa *m*.



En particular, él mismo, para mantenerse en reposo, debe sostenerse de algún objeto rígidamente unido al recinto, o hacer uso de la fricción contra el suelo, para permitir la acción de una fuerza $\mathbf{R} = -m\mathbf{a}^*$ necesaria para su reposo relativo al recinto. Finalmente, un péndulo tendrá posición de equilibrio como en la figura, para que la

tensión **T** y el peso $m\mathbf{g}$ provean como resultante la fuerza $\mathbf{R} = -m\mathbf{a}^*$. Para el observador inercial esto es obvio, ya que la masa del péndulo no está en reposo, sino que se mueve con movimiento acelerado. Por lo tanto, debe actuar sobre ella una fuerza (3.5) $m\mathbf{a}$ ($= -m\mathbf{a}^*$) provista por la tensión del hilo y el peso.

Ahora bien, el observador en el sistema no-inercial O' puede "salvar" la validez de las ecuaciones de Newton en su sistema, postulando que sobre todo cuerpo de masa m aparece una fuerza de valor

$$\mathbf{f}^* = m\mathbf{a}^* \qquad (3.24)$$

donde $\mathbf{a}^*$ es la aceleración con que ese observador ve moverse a todo cuerpo libre de fuerzas de interacción (o cuya resultante sea nula). Efectivamente, si este observador supone válida "por decreto" la ecuación de Newton (3.5), entonces para él *todo sucede como si* sobre todo cuerpo actuara una fuerza $\mathbf{f}^* = m\mathbf{a}^*$, que le imparte la aceleración observada $\mathbf{a}^*$. Si quiere mantener el cuerpo en reposo, debe equilibrar la fuerza $\mathbf{f}^*$ con una fuerza igual y de sentido contrario:

$$\mathbf{R} + \mathbf{f}^* = 0$$

Esta fuerza $\mathbf{f}^*$ se denomina *fuerza inercial*. No entraremos en la discusión filosófica de si estas fuerzas inerciales son "reales" o "ficticias". Simplemente diremos lo siguiente:

1) Si el observador en O no sabe que está en un sistema acelerado respecto de un sistema inercial, y si usa las leyes de Newton "de prepo", comprueba la existencia de una fuerza $\mathbf{f}^*$ que actúa sobre cada cuerpo. Esto se debe a que, decretando la validez de la ecuación de Newton, la noción de fuerza aparece como causa de toda aceleración. Lo que por el momento aún le queda por encontrar al observador O' es el mecanismo de interacción al cual hacer responsable de la acción de esta fuerza.

2) Si el observador en O' sabe que está en un sistema acelerado respecto de uno inercial, no puede usar las ecuaciones de Newton en "su" sistema por ser éste un sistema no-inercial. Para describir lo que ocurre en su sistema, debe previamente "traducir" todo lo que observa a un sistema inercial. Y, para ese sistema inercial, no existe fuerza inercial.[12]

De esto se desprende que las fuerzas inerciales son fuerzas cuya "existencia" depende del sistema de coordenadas desde el que se describe un movimiento dado. En eso difieren fundamentalmente de lo que hemos llamado "fuerzas de interacción", que son totalmente independientes del sistema de referencia, estando dadas exclusivamente por el mecanismo de interacción en sí. Las fuerzas inerciales no están asociadas a ningún mecanismo de interacción; por ello no vale para ellas el "principio" de acción y reacción. No existe aplicada en parte alguna una fuerza opuesta a la (3.24).

Ahora llegamos a un punto importante: supongamos a un observador en un recinto cerrado, en el espacio "interestelar". Supongamos además que este observador comprueba:

12. El nombre "fuerza inercial" es poco afortunado, pues esta fuerza precisamente sólo aparece en sistemas no-inerciales

a) que todo cuerpo libre de fuerzas de interacción ejecuta un movimiento acelerado, con una aceleración $\mathbf{a}^*$ independiente de la masa del cuerpo.

b) para mantener un cuerpo en reposo, debe ejercer una fuerza exterior $\mathbf{R} = -m\mathbf{a}^*$.

Es fácil comprender que pueden estar pasando dos cosas, alternativamente:

1) el recinto del observador está siendo acelerado uniformemente respecto de un sistema inercial (por algún misterioso cohete) con una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{a}^*$. Sobre todo cuerpo actúa entonces una fuerza inercial $\mathbf{f}^* = m\mathbf{a}^*$ para el observador en el interior del recinto.

2) el recinto del observador se encuentra en reposo en un campo gravitatorio (de una estrella), de intensidad $\mathbf{G} = \mathbf{a}^*$. Sobre todo cuerpo actúa una fuerza, el peso $\mathbf{P} = \mu\,\mathbf{G} = m\mathbf{a}$ (3.12).

El observador *no puede distinguir* entre esas dos posibilidades con experiencias mecánicas hechas en el interior de su recinto.[13]

Supongamos ahora otro caso: el observador en el recinto cerrado verifica que todo cuerpo libre de fuerzas se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (o permanece en reposo). También aquí pueden estar pasando dos cosas, alternativamente:

1) El sistema es un sistema inercial (lejos de todo cuerpo celeste) en el que valen las leyes de Newton.

2) El sistema está en caída libre (con movimiento uniformemente acelerado) en el campo gravitatorio de una estrella.

En este último caso, sobre todo cuerpo actuarán dos fuerzas: el peso $\mathbf{P} = \mu\,\mathbf{G} = m\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$: aceleración de la gravedad donde está cayendo el recinto), y la fuerza de inercia $\mathbf{f}^* = -m\mathbf{a}$ (por ser un sistema que cae con la aceleración $\mathbf{a}$.) Por lo tanto, para un cuerpo libre de otras fuerzas de interacción:

$$\mathbf{f}^* + \mathbf{P} = 0$$

O sea, ese cuerpo continúa libre de fuerza total.

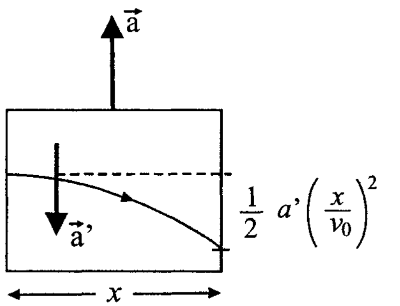
Nuevamente, el observador *no puede distinguir* entre las dos posibilidades mediante experiencias mecánicas hechas en el interior del recinto. En resumen, deducimos que el observador en el recinto no podrá distinguir con experiencias mecánicas entre fuerza inercial y fuerza gravitatoria. Contrariamente a lo que dijimos más arriba, este observador podría asignarle un mecanismo de interacción a la fuerza inercial: ¡el gravitatorio!

Esta equivalencia entre fuerza inercial y campo gravitatorio *no* es un principio, sino consecuencia de la proporcionalidad entre masa gravitatoria y masa inercial (3.10), la cual

13. Nuevamente, el hecho de "mirar por una ventana" no vale, porque implicaría una interacción con otro sistema.

es responsable de que la aceleración en interacciones gravitatorias sea la misma para todos los cuerpos. Ahora bien, la experiencia indica que no es posible discernir entre fuerza inercial y campo gravitatorio con *ningún* tipo de procesos físicos (electromagnético, elástico, etc.). Éste es el *principio de relatividad general.*

A título de ejemplo para el significado de este principio, veamos la siguiente experiencia (ideal): el observador en el interior del recinto de la figura comprueba que todos los cuerpos libres de fuerzas de interacción se mueven con aceleración **a*** hacia abajo. En particular, una bolita lanzada con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a la aceleración **a*** "caerá" para ese observador con una parábola de tiro. Esto pasará evidentemente tanto para el caso en que el recinto estuviere acelerado hacia arriba con aceleración **a** = – **a*** como en el caso en que estuviere en reposo respecto de un campo gravitatorio de intensidad **G** = **a***.



Consideremos ahora que, en lugar de una bolita, el observador dispara un haz de luz en forma perpendicular a la aceleración **a***. La propagación de la luz es un proceso electromagnético, no mecánico. Para el caso en que el recinto se mueve con aceleración hacia arriba, la luz se deflectará parabólicamente hacia abajo (poquísimo por su enorme velocidad inicial, de $3 \,.\, 10^8$ m/seg), por cuanto "en realidad", en ese caso, es el piso del recinto el que se acerca hacia el haz con movimiento acelerado. Si, en cambio, el recinto está en reposo en un campo gravitatorio, el haz de luz *debe* deflectarse hacia abajo en la misma forma que antes, para que, de acuerdo con lo exigido por el principio de relatividad general, no se pueda distinguir físicamente este caso del anterior. Por lo tanto, este principio implica necesariamente el hecho físico de que la luz "pesa", o sea, se deflecta en un campo gravitatorio. Esto no se puede predecir sobre la base del electromagnetismo. Este hecho fue verificado experimentalmente, midiendo durante eclipses solares la deflección en las vecindades del Sol del haz luminoso de una estrella.

Capítulo 4

Teoremas de conservación

a) Los teoremas de conservación y las integrales de movimiento

Las experiencias ideales de Mach tienen un sentido físico muy profundo, especialmente para la concepción actual de la física. Efectivamente, colocan claramente por encima de todo al proceso elemental de "interacción", reconocido como el concepto fundamental para el estudio de la estructura de nuestro Universo. El método de Mach nos enseña que en ese proceso elemental, cualquiera sea la naturaleza del mecanismo de éste, existen ciertas regularidades, cierto "orden", totalmente independientes del caso particular en cuestión. Las nociones de masa y fuerza son entes físicos, definidos para poder representar sistemáticamente ese "orden preestablecido". La masa es un concepto asociado a cada uno de los cuerpos interactuantes en forma independiente de la interacción. La fuerza, en cambio, es un concepto asociado a la interacción en sí.

De las experiencias de Mach se pueden deducir una serie de relaciones adicionales, que representan una serie de limitaciones para los movimientos posibles de las masas interactuantes, limitaciones éstas independientes en general del mecanismo particular de interacción. Cada una de estas relaciones constituye lo que se denomina un teorema de conservación. (Frecuentemente se denominan también "principios" de conservación. Para nosotros no son principios, por cuanto son mera consecuencia de las leyes de Mach.)

Para cada uno de estos teoremas de conservación se define una nueva magnitud física, función de las variables cinemáticas, cuyo valor numérico permanece constante, estando totalmente fijado por las condiciones iniciales del sistema de masas interactuantes. La constancia de ese ente representa la expresión matemática del teorema de conservación. Su denominación como "integral de movimiento" proviene en esencia del hecho de que estos entes se obtienen a partir de una integración de la relación de Newton (3.5).

El significado físico fundamental de las constantes de movimiento surge del hecho de que ellas sirven para predecir la evolución de un sistema de cuerpos en interacción en forma independiente del caso particular en cuestión. Por supuesto que no se puede predecir *totalmente* la evolución de un sistema, haciendo uso de los teoremas de conservación exclusivamente (salvo en casos particulares). Una descripción completa de la evolución siempre requerirá, en última instancia, un conocimiento detallado del tipo de interacciones intervinientes y una subsecuente integración de las ecuaciones de movimiento. Pero las integrales de movimiento nos brindan una ayuda formidable para simplificar esta descripción, puesto que representan severísimas limitaciones en las posibilidades para el movimiento de un sistema.

Esto es particularmente importante en los choques y en la descripción de sistemas atómicos y subatómicos, en los que es difícil (o imposible) determinar y medir lo que sucede *durante* la interacción. En esos procesos, las relaciones de Mach no son accesibles experimentalmente; pero sus consecuencias inmediatas, los teoremas de conservación, son verificables con gran precisión, ya que nos vinculan los valores de las variables

dinámicas en el estado inicial (antes de ocurrir la interacción) con los del estado final (una vez cesada la interacción).

En física clásica, las integrales de movimiento para la interacción de masas puntuales son tres: el impulso lineal, el impulso angular y la energía mecánica. Cada una de éstas aparece definida por un teorema de conservación. Las dos primeras son particularmente útiles en la descripción de procesos de colisión; la energía mecánica presta sus servicios con máxima eficiencia en la descripción de procesos en los que la interacción (la fuerza) depende sólo de la posición (campo de fuerzas).

b) La conservación del impulso; el centro de masa

Partamos de la relación (3.2)

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = 0$$

Evidentemente podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2\right) = 0$$

en vista de la definición de la aceleración. Por lo tanto, el vector dado por el paréntesis será constante:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{cte.} = m_1\,\mathbf{v}_1^0 + m_2\,\mathbf{v}_2^0 \qquad (4.1)$$

$\mathbf{v}_1^0$ y $\mathbf{v}_2^0$ son las velocidades iniciales de las dos masas, respectivamente. Tenemos otra relación notable, consecuencia de la anterior. Cualquiera sea el mecanismo con el que interactúan dos cuerpos, el vector $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ es siempre el mismo, estando determinado exclusivamente por las condiciones iniciales. Ese vector notable, que no puede ser modificado por las interacciones entre dos cuerpos, se denomina vector *impulso total* del sistema. Los vectores $\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{v}_2$ se llaman vectores impulso de cada cuerpo. La igualdad (4.1) indica que la suma de los vectores impulso (impulso resultante) de dos masas interactuantes es independiente del tiempo. Estamos en presencia de la primera integral o constante de movimiento. La relación (4.1) se llama "teorema de conservación del impulso lineal".

Obsérvese bien: mientras que los impulsos individuales $m_1\mathbf{v}_1$ y $m_2\mathbf{v}_2$ varían cada uno de acuerdo con el mecanismo en cuestión, siendo en general funciones del tiempo, la suma vectorial debe permanecer necesariamente constante, enteramente fijada por las condiciones iniciales.

Si, en particular, ambos cuerpos están inicialmente en reposo respecto del sistema de referencia, tendremos:

$$\mathbf{P}_1^0 = m_1\mathbf{v}_1^0 = 0 \qquad\qquad \mathbf{P}_2^0 = m_2\mathbf{v}_2^0 = 0$$

para el instante inicial. Por lo tanto, en cualquier instante, durante o después de la interacción:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0 \qquad (4.2)$$

En otras palabras, dos cuerpos puntuales en interacción mutua, que inicialmente han estado en reposo, no sólo tendrán sus aceleraciones opuestas y en relación inversa de sus masas (3.2), sino también sus velocidades serán opuestas y sus módulos estarán en relación inversa de las masas, en cualquier instante y para cualquier mecanismo.

Lo notable de la relación (4.1) que expresa la conservación del impulso total es que sigue teniendo sentido físico aun después de que la interacción entre los dos cuerpos haya cesado. Efectivamente, si por alguna causa cesa la interacción, tendremos $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = 0$; por lo tanto $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$ y la relación $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$ ya no tendrá más sentido (ya que en ese caso también valdría $m_1^2\mathbf{a}_1 + m_2^2\mathbf{a}_2 = 0$ o cualquier otra combinación). Sin embargo, la expresión

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

está definida siempre; si la interacción cesa, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son constantes por separado (ya que, siendo $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ nulos, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ serán constantes).

La relación (4.2) permite determinar masas inerciales en una forma más accesible desde el punto de vista experimental que la (3.1) o (3.2). Efectivamente, la medición de velocidades es más fácil en la práctica que la medición de aceleraciones. Además, en el caso de una interacción de duración limitada (como en el caso de dos carritos inicialmente en reposo que se separan mutuamente impelidos por la expansión de un resorte, o en el caso de las dos partes en que se desintegra un núcleo atómico radiactivo o una partícula elemental inestable), la medición de masas por la (3.2) requeriría la medición de las aceleraciones en un tiempo cortísimo, mientras que por medio de la (4.2) es posible medir las velocidades "con toda comodidad", una vez que la interacción haya cesado. Ésta es precisamente la forma en la que se han determinado en física nuclear las masas de la mayoría de las partículas elementales.

Volvamos a la expresión (4.1). Evidentemente la podemos escribir en la forma

$$\mathbf{P} = \frac{d}{dt}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2\right)$$

donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores posición de cada una de las masas (recuérdese bien que estamos tratando cuerpos puntuales).

Dividiendo por $m_1 + m_2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\mathbf{P}}{m_1 + m_2} = \text{cte.}$$

El vector que figura en el paréntesis

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.3)$$

tiene evidentemente las dimensiones de un vector posición (longitud), y señala un punto ficticio en el espacio, que se llama "centro de masa" del sistema de los dos cuerpos puntuales. Si bien este punto es ficticio, él está unívocamente determinado por la posición de las masas y tiene propiedades muy notables. Efectivamente, según lo visto más arriba:

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{V}_c = \frac{\mathbf{P}}{m_1 + m_2} = \text{cte.} \qquad (4.4)$$

$\mathbf{V}_c$ es la velocidad del centro de masa. Se observa que el centro de masa de un sistema de dos cuerpos puntuales interactuantes se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, en forma independiente del tipo de interacción mutua, con una velocidad dada exclusivamente por las condiciones iniciales.

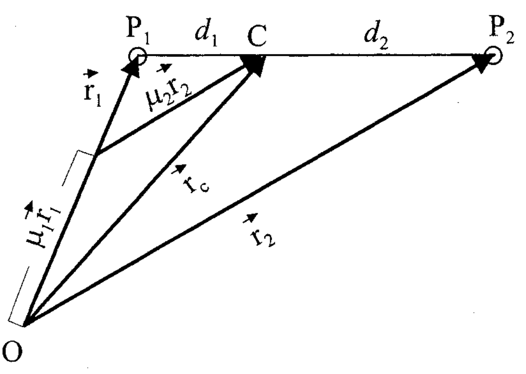
En particular, si las dos masas están inicialmente en reposo, $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{V}_c = 0$, el centro de masa continuará en reposo, cualquiera sea el tipo de interacción.

Demostraremos que el centro de masa está sobre la recta que une los dos cuerpos y que es interior al segmento definido por las masas. Para ello escribiremos la relación

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_2 = \mu_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\mathbf{r}_2$$

μ_1 y μ_2 se llaman "masas reducidas" de los dos puntos (no confundir el símbolo μ con lo que habíamos definido como masa gravitatoria). Evidentemente

$$0 \le \mu_1 \le 1 \qquad 0 \le \mu_2 \le 1 \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1$$



Sea el triángulo definido por OP_1P_2, en un instante dado. Sea **OA** el vector $\mu_1\mathbf{r}_1$ (del mismo sentido y módulo siempre menor que el $\mathbf{r}_1$). A ese vector hay que sumarle un vector paralelo y del mismo sentido que $\mathbf{r}_2$ que es el $\mu_2\mathbf{r}_2$. Demostraremos que ese vector es precisamente el **AC**, donde C es la intersección de la paralela a $\mathbf{r}_2$ por A, con P_1P_2. Efectivamente, considerando los triángulos AP_1C y OP_1P_2, que son semejantes, tenemos

$$\frac{AC}{r_2} = \frac{r_1 - \mu_1 r_1}{r_1} \qquad \text{o sea} \qquad AC = r_2(1 - \mu_1) = \mu_2 r_2$$

Obsérvese que las distancias d_1 y d_2 de cada masa al centro de masa están en la relación (considerar los mismos triángulos):

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1 - \mu_1 r_1}{\mu_1 r_1} = \frac{1-\mu_1}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m_2}{m_1}$$

o sea inversa de las masas: el centro de masa está siempre más cerca de la masa más pesada. En particular, si $m_1 >> m_2$, el centro de masa prácticamente coincidirá con la posición de m_1. Obsérvese una notable limitación geométrica que introduce la expresión (4.4) del movimiento constante del centro de masa. Efectivamente, si en un instante t cualquiera conocemos la posición $\mathbf{r}_1$ de una de las masas interactuantes, queda totalmente determinada la posición de la otra masa, a través de la relación (4.3), ya que $\mathbf{r}_c$ es función exclusiva de las condiciones iniciales, que se suponen conocidas:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c^0 + \mathbf{V}_c^0 t = \frac{m_1\left(\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{v}_1^0 t\right) + m_2\left(\mathbf{r}_2^0 + \mathbf{v}_2^0 t\right)}{m_1 + m_2}$$

Siendo el centro de masa un punto tan notable, se lo suele usar como centro de un sistema de coordenadas, el llamado "Sistema Centro de Masa". Ese sistema siempre será inercial, puesto que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, de velocidad constante $\mathbf{V}_c$, respecto del sistema inercial original. Para pasar al Sistema Centro de Masa es necesario hacer una transformación de Galileo (3.23). Para ese sistema, el centro de masa está en reposo, es decir, según la (4.13), $\mathbf{P} = 0$. O sea $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$ en todo momento. Es un sistema simétrico respecto de los impulsos de los dos cuerpos. Este sistema tiene mucha importancia para la descripción de los procesos de la física nuclear y en toda rama de la física en que intervengan problemas de choques entre cuerpos o partículas.

Para finalizar, veamos una relación importante entre impulso y fuerza. Según la definición del impulso de un cuerpo, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f} \qquad (4.5)$$

ya que $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}$. Integrando tenemos

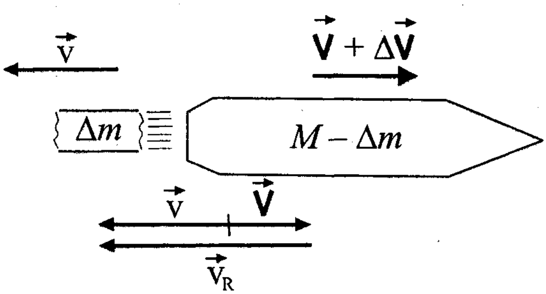
$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = \Delta\mathbf{P} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(t')\,dt' \qquad (4.5a)$$

O sea, la integral respecto del tiempo de la fuerza que actúa sobre un cuerpo da la variación de su impulso. Algunos prefieren llamar impulso al producto $\mathbf{f}\,dt$, dando el nombre de "variación de la cantidad de movimiento" a $d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v})$.

c) Fuerzas de retropropulsión y movimiento de un cohete

Como ejemplo importante de aplicación del teorema de conservación del impulso, daremos el principio de funcionamiento del motor a retropropulsión.

Consideremos el caso de un cohete de masa M, que en un intervalo Δt pequeño expulse en forma continua una masa Δm de gas con una velocidad relativa al cohete $\mathbf{v}_r$ (determinada por la combustión y demás condiciones en la tobera), en dirección opuesta a la velocidad del cohete $\mathbf{V}$, referida a un sistema en reposo.



Antes de la expulsión, el impulso total es $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$. Después de la expulsión, ese impulso se compone de dos términos, el impulso $\Delta m\mathbf{v}$ de la masa de gas expelida y el impulso $(M - \Delta m)$ $(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V})$ de lo que queda del cohete:

$$\mathbf{P} = \Delta m\mathbf{v} + (M - \Delta m)(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V})$$

$\Delta\mathbf{V}$ representa la variación de la velocidad del cohete. Para la velocidad de los gases respecto del sistema en reposo tenemos la relación (2.14) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{V}$. Por lo tanto, por el teorema de conservación del impulso:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} = \Delta m\mathbf{v}_r + M\mathbf{V} + M\Delta\mathbf{V} - \Delta m\Delta\mathbf{V}$$

El cohete habrá variado entonces su velocidad en

$$\Delta\mathbf{V} = -\frac{\Delta m}{M}\mathbf{v}_r$$

(despreciamos el producto $\Delta m\Delta\mathbf{V}$, diferencial de segundo orden).

Como todo esto sucede en el tiempo Δt, dividiendo por Δt y pasando al límite, obtenemos la aceleración del cohete:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{M}\frac{dm}{dt}\mathbf{v}_r$$

Llamando $\mu = dm/dt$, caudal[14] del chorro de gas, regulado por el motor, tenemos

$$M\mathbf{a} = \mathbf{f} = -\mu\,\mathbf{v}_r \qquad (4.6)$$

14. Habría que decir "caudal másico".

f es la fuerza de *empuje* del cohete. Obsérvese que esa fuerza corresponde a la interacción del cohete con el chorro de gas. La otra fuerza ("reacción") está aplicada a la masa de gas expelida. En la expresión (4.6), μ y $\mathbf{v}_r$ son datos dados por las características del motor.

El motor a retropropulsión es el motor de principio de funcionamiento "más simple" de la física, pues no necesita ningún medio material exterior para interactuar, como todos los demás sistemas de propulsión. Por ello, es el único motor utilizable en el vacío. Claro está que en el caso del motor a retropropulsión también hay un "medio"; sólo que en este caso ese "medio" es provisto por el propio motor: es la masa de gas expelida.

Según la expresión (4.6), cuanto mayor sea la velocidad de escape de los gases $\mathbf{v}_r$ y mayor el caudal μ expulsado, tanto mayor será el empuje. Si bien no puede evitarse el hecho de tener que expulsar una masa dada, el caudal de expulsión puede, en principio, ser arbitrariamente pequeño, con tal de lograr una velocidad de expulsión suficientemente grande. En esto radica precisamente todo el problema técnico del motor de reacción: lograr una máxima velocidad de expulsión de los gases para reducir a un mínimo el caudal y, con ello, la cantidad total de combustible necesario.

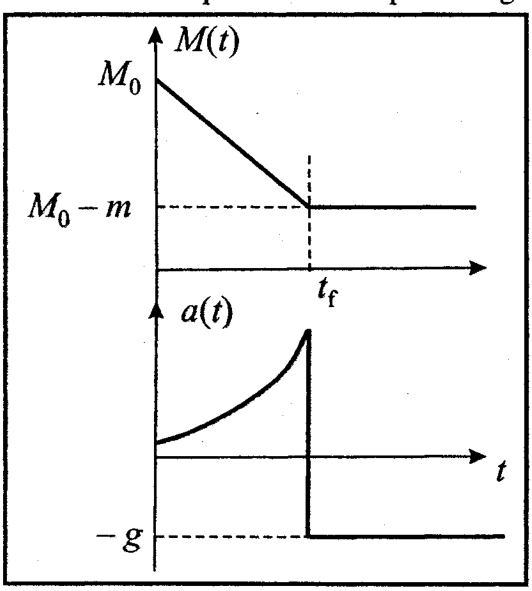
Volviendo a la expresión (4.6), notamos que

$$\mu = \frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

puesto que μ representa la disminución de la masa del cohete en la unidad de tiempo. La ecuación de movimiento de un cohete se puede escribir, entonces:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\mathbf{v}_r + \frac{\mathbf{f}_e}{M} \qquad (4.7)$$

En $\mathbf{f}_e$ incluimos todas las demás fuerzas exteriores (gravedad, resistencia del aire). Recuérdese que dM/dt siempre es negativa.



Consideremos el caso de un cohete que asciende verticalmente, partiendo con una velocidad vertical inicial $\mathbf{V}_0$. Despreciemos el rozamiento del aire y supongamos g constante (el cohete no se aleja mucho de la superficie terrestre). Supongamos además que el caudal expulsado sea constante. Entonces, la masa del cohete será una función del tiempo dado por la relación $M(t) = M_0 - \mu\, t$, en la que M_0 es la masa inicial total del cohete. Si llamamos m a la masa total inicial de combustible, habrá un tiempo t_f al cabo del cual se habrá acabado el combustible, dado por $t_f = m/\mu$ (tiempo de quemado). Después de ese instante, el empuje del cohete es nulo, y su masa $M_f = M - m$, constante. La ecuación de movimiento (4.7) será, entonces:

$$\frac{dV}{dt} = a = \frac{\mu \ |v_r|}{M_0 - \mu t} - g$$

para $t < t_f$. Después de ese instante, el cohete entra en un movimiento de tiro libre. Obsérvese que la condición para que el cohete pueda partir del reposo ($V_0 = 0$) es que

$$\frac{\mu \ |v_r|}{M_0} > g$$

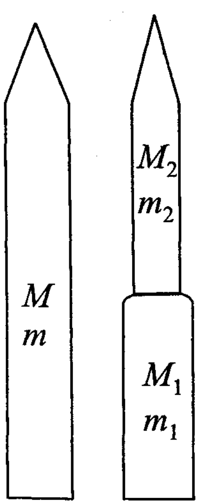
(empuje mayor que peso inicial). Esta condición puede no cumplirse en el instante inicial pero ser alcanzada en un tiempo posterior, cuando la masa del cohete haya disminuido convenientemente. Obsérvese que la aceleración del cohete crece con el tiempo, pese a ser constante el empuje; ello se debe a que la masa del mismo va disminuyendo. Integrando la ecuación de movimiento, queda

$$V(t) = V_0 + |v_r| \int_0^t \left(\frac{\mu \ dt}{M_0 - \mu t} \right) - g t = V_0 + |v_r| \ln \frac{1}{1 - \mu t / M_0} - g t$$

La velocidad del cohete aumenta logarítmicamente hasta el valor final, máximo, al que llega en el instante en que se acaba el combustible:

$$V_f = V_0 + \ln \frac{1}{1 - m/M_0} - g \frac{m}{\mu} \qquad (4.8)$$

Obsérvese que en ese valor, el cociente m/M_0, o sea, la relación entre combustible total y masa total inicial, juega un papel clave: cuanto más cercano a 1 sea ese cociente, tanto mayor será la velocidad final del cohete. Por esa razón, los grandes cohetes tienen un 95% de su peso inicial en forma de combustible. Por otro lado, se ve que, en un principio, la cantidad total de combustible podría ser arbitrariamente pequeña, si se pudiera aumentar la velocidad de expulsión a un valor suficientemente alto. Éste es el principio del motor de propulsión iónica, en el que se aceleran y expulsan átomos eléctricamente cargados a velocidades cercanas a la de la luz.



Vamos a demostrar que el valor de (4.8) es siempre menor que aquél que obtendría la segunda parte de un cohete de dos etapas, de igual peso total y combustible total que el de una sola etapa arriba considerado. Sean M_1, M_2 y m_1, m_2 las masas iniciales de las etapas y de sus combustibles, respectivamente, y supongamos, para mayor facilidad, que para las dos etapas μ, $\mathbf{v}_r$ y la relación entre el peso del combustible y el peso total inicial sean las mismas. Por la condición de igual peso total al del cohete del ejemplo anterior, tenemos $M_1 + M_2 = M_0$ y $m_1 + m_2 = m$.

Para la velocidad final en la primera parte del movimiento (las dos etapas juntas, de masa inicial $M_1 + M_2$, impulsadas por el motor de la primera y que parten del reposo), tenemos:

$$V_{f_1} = |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{\mu}{M_1 + M_2} t_1} - g\, t_1$$

donde t_1 es el tiempo de quemado de la primera etapa:

$$t_1 = m_1 / \mu$$

O sea:

$$V_{f_1} = |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_1}{M_1 + M_2}} - g\, t_1$$

En el instante t_1 se desprende lo que queda de la primera etapa, y sigue la segunda etapa con una velocidad inicial $v_0 = v_{f_1}$ y una masa inicial M_2. La velocidad final alcanzada luego del tiempo $t_2 = m_2 / \mu$ será, entonces:

$$V_{f_2} = V_{f_1} + |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_2}{M_2}} - g \frac{m_2}{\mu} = |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_1}{M_1 + M_2}} + |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_2}{M_2}} - g \frac{m_1 + m_2}{\mu}$$

Recordando que, por las condiciones impuestas,

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2} = \frac{m}{M_0} \quad , \quad M_1 + M_2 = M_0 \quad , \quad m_1 + m_2 = m$$

tenemos, para la velocidad final de un cohete de dos etapas:

$$V_{f_2} = |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m}{M_0}} - g \frac{m}{\mu} + |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_1}{M_0}} - g \frac{m}{\mu} = V_f + |v_r| \ln \frac{1}{1 - \dfrac{m_1}{M_0}}$$

donde V_f es la velocidad final (4.8) de un cohete del mismo peso y con la misma cantidad de combustible, de una sola etapa. Haciendo dos etapas, hemos logrado, entonces, una ganancia en velocidad final de valor

$$|v_r|\ln\frac{1}{1-\dfrac{m_1}{M_0}}$$

Ésta es la razón por la que invariablemente se unen varios cohetes para formar las varias etapas de un solo vehículo. La razón física de la ganancia de velocidad reside sencillamente en el hecho de que en un cohete de varias etapas se va desprendiendo durante el vuelo la masa inerte de las carcasas que contenían el combustible utilizado, disminuyendo así la masa que debe ser acelerada por las etapas ulteriores.

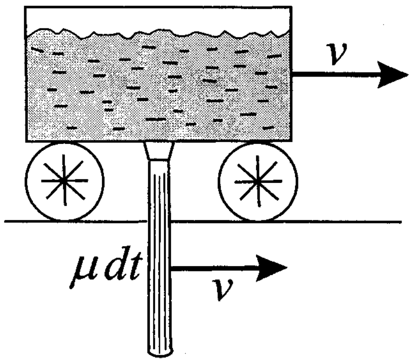
d) Ecuaciones de movimiento para masas variables

El movimiento de un cohete es un ejemplo de movimiento de un cuerpo con masa variable. En un movimiento con masa variable hay un aparente conflicto entre las relaciones (3.5) y (4.5)

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Efectivamente, si suponemos válida la primera, tendríamos para la segunda

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} \neq \mathbf{f}$$



En cambio, si suponemos válida la segunda, quedaría para la primera:

$$m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \mathbf{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{f} - \mathbf{v}\frac{dm}{dt} \neq \mathbf{f}$$

¿Cuál de las dos formas (3.5) o (4.5) es correcta?

Consideremos un ejemplo: un carrito con un tanque de agua que se mueve con velocidad inicial **v**, libre de fuerzas exteriores, y que pierde líquido hacia abajo a caudal constante $\mu = -dm/dt$ (m masa del carrito). Hallemos el movimiento. Si usamos la relación (3.5), tendríamos $m\mathbf{a} = \mathbf{f} = 0$, pues en la dirección del movimiento no hay fuerzas exteriores. Por lo tanto, el movimiento será uniforme, independientemente del caudal de agua que pierde.

Si, en cambio, usamos la relación (4.5), sería $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{f} = 0$, obteniendo aparentemente

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} - \mu\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

O sea, un movimiento acelerado para el carrito, que depende del caudal perdido **en la** forma

$$\mathbf{a} = \frac{\mu \mathbf{v}}{m}$$

Sin embargo, la experiencia muestra que el movimiento es uniforme. Esto no quiere decir que la expresión (4.5) sea incorrecta, sino que *la hemos usado incorrectamente*. Hay que tener gran cuidado al definir lo que se entiende por la variación de impulso que interviene en la (4.5):

$$d\mathbf{P} = (\text{impulso del sistema en } (t + dt)) - (\text{impulso del sistema en } t)$$

Pero el impulso del sistema en $t + dt$ se compone del impulso del carrito $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ (nótese que dm < 0), *más el impulso* $\mu\, dt\, \mathbf{v}$ de la masa de agua $\mu\, dt$ que se suelta en dt y que sigue en la dirección del movimiento del carrito. El impulso del sistema en el instante t es $m\mathbf{v}$. Por lo tanto:

$$d\mathbf{P} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mu\, dt\mathbf{v} - m\mathbf{v} = d(m\mathbf{v}) + \mu\, dt\mathbf{v}$$

Ésta es la variación total de impulso correcta. Dividiendo por dt, obtenemos, según la (4.5):

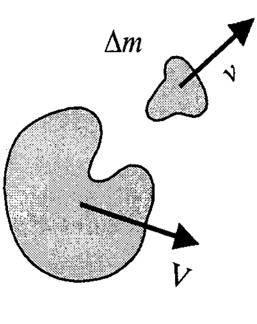
$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mu\,\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{v} = m\mathbf{a} - \mu\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{v} = m\mathbf{a} = 0$$

En otras palabras, en el caso de masas variables, es necesario incluir en la relación (4.5) el impulso *que se lleva* la fracción de masa que se va (o que *trae* la fracción de masa que viene, en el caso $dm > 0$). Esto quiere decir que en (4.5) no interviene la derivada del impulso $m\mathbf{v}$ respecto del tiempo, sino el cociente diferencial entre la variación completa de impulso del sistema y el intervalo de tiempo.

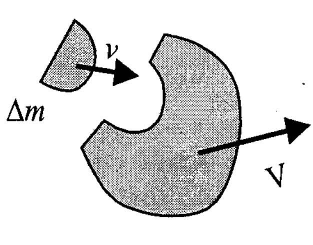
Esto está íntimamente ligado con el *principio de conservación de la masa*. Este principio nos dice que si la masa de un cuerpo disminuye (o aumenta) en Δm, esa porción de masa Δm necesariamente debe irse a (o venir de) alguna parte, con una velocidad dada. Por lo tanto, esa porción se "lleva" (o "trae") un impulso

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta m\, \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad con que se va (o con que viene) la porción Δm (y que no tiene por qué ser igual a la velocidad de la masa original).



Δm se lleva impulso



Δm trae impulso

Veamos, para terminar, el caso de un carrito de masa m que pierde agua horizontalmente hacia atrás, a la razón $\mu = -dm/dt$ y con una velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ al carrito.

Teniendo en cuenta lo visto con el cohete, sobre el carrito actuará una fuerza de retropropulsión $\mathbf{f} = -\mu\,\mathbf{v}_r$. Haciendo primero uso de la relación (3.5), tendremos

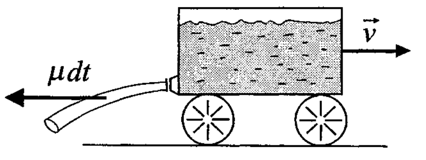
$$\mathbf{a} = -\frac{\mu}{m}\mathbf{v}_r$$

El carrito se moverá, entonces, con una aceleración en dirección contraria a $\mathbf{v}_r$.

Si ahora, en cambio, usamos la relación (4.5), teniendo ya cuidado de incluir en $d\mathbf{P}$ el impulso que se lleva la masa de agua $\mu\,dt$, expelida hacia atrás, tendremos:

$$d\mathbf{P} = d(m\mathbf{v}) + \mu\,dt\,(\mathbf{v}_r + \mathbf{v})$$

($\mathbf{v}_r + \mathbf{v}$, velocidad de la masa de agua expelida respecto del suelo), quedando, entonces:



$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mu(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{v}_r + \mu\,\mathbf{v} = m\mathbf{a} - \mu\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{v}_r + \mu\,\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{v}_r$$

Por la (4.5), este valor, aparentemente, debe ser igual a la fuerza de retropropulsión $\mathbf{f} = -\mu\,\mathbf{v}_r$. Quedaría finalmente:

$$m\mathbf{a} = -2\mu\,\mathbf{v}_r \qquad \text{o sea} \qquad \mathbf{a} = -2\frac{\mu}{m}\mathbf{v}_r$$

Con la (4.5) obtenemos una aceleración de valor doble al deducido a partir de la (3.5), hecho que resulta contrario al resultado experimental. ¿Dónde está el conflicto ahora? La contestación es la siguiente. En la expresión (4.5)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}$$

no deben incluirse las fuerzas de retropropulsión, sino sólo las fuerzas de interacción con masas que *no* formaban (ni habrán de formar) parte del cuerpo cuyo movimiento se está describiendo. Las fuerzas que intervienen en la (4.5) son, entonces, sólo las fuerzas exteriores en el sentido "genuino" de la palabra (ejercidas por la interacción con un sistema exterior y que permanece exterior: frotamiento, gravitación, reacciones de vínculo, etc.). Si bien la fuerza de

retropropulsión es una fuerza "exterior" al carrito en sí, es una fuerza "interior" en el sistema carrito + agua expelida, cuyo impulso total interviene en el cálculo de $d\mathbf{P}$.

Esto nuevamente está ligado íntimamente con el principio de conservación de la masa. Cada vez que se va (o viene) una porción de masa Δm con una velocidad que no es igual a la velocidad del cuerpo original (o sea que $\mathbf{v}_r \neq 0$), necesariamente aparece una fuerza de retropropulsión que proviene de una interacción "interior" entre ese cuerpo y esa porción de masa. Esta fuerza, por lo visto arriba, debe ser excluida en la expresión (4.5), por cuanto ya viene dada "gratis" (cambiada de signo) al calcular correctamente el cociente diferencial $d\mathbf{P}/dt$.

En resumen, al tratar el caso de masas variables, en la expresión (3.5)

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

es necesario considerar *todas las fuerzas* de interacción sin excepción, actuantes sobre la masa m.

En la expresión (4.5)

$$\mathbf{f}^* = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

es necesario tener en cuenta dos cosas: 1°) hay que calcular *correctamente* la variación de impulso, incluyendo el impulso que se lleva (o trae) la fracción de la masa que sale (o llega); 2°) en la expresión de $\mathbf{f}^*$ deben *excluirse* todas las fuerzas de retropropulsión (por ello ponemos $\mathbf{f}^*$, para distinguirla de la resultante que interviene en (3.5)).

En los libros suele haber una tremenda confusión respecto de este punto.

Hemos enunciado arriba el principio de conservación de la masa. Este principio no se cumple para cuerpos que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. Se han hecho experiencias muy precisas con electrones y otras partículas elementales que permiten establecer una dependencia de la masa de un cuerpo con su velocidad, dada en la forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (4.9)$$

(c, velocidad de la luz). O sea, la masa de un cuerpo aumenta con la velocidad. Por cierto que ese aumento sólo será perceptible para valores de v/c cercanos a 1. En particular, para $v \to c$, $m \to \infty$ (por suerte, una partícula material nunca puede alcanzar la velocidad de la luz). La constante m_0 se llama masa en reposo. Corresponde a la masa de la partícula cuando $v \ll c$.

Con la nueva expresión (4.9) para la masa inercial de un cuerpo, el impulso queda definido por la relación

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Ésta es la expresión que hay que utilizar en el teorema de conservación del impulso, cuando los cuerpos intervinientes tienen velocidades cercanas a la de la luz.

La ley (4.9) nos enseña que todo cuerpo que es acelerado cambia su masa, pero que ese cambio no respeta el principio de conservación de la masa. Se trata de un cambio intrínseco. En la variación relativística de la masa no hay, entonces, impulso que sea "llevado" o "traído" y que salve la aparente discrepancia entre las relaciones $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ y $\mathbf{f} = d\mathbf{P}/dt$. Para este caso, sólo la teoría de la relatividad puede obviar este inconveniente, saliendo como "vencedora definitiva" la relación (4.5): $\mathbf{f} = d\mathbf{P}/dt$.

e) La conservación del impulso angular

Consideremos nuevamente la relación (3.2): $m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$. Daremos ahora forma matemática al hecho físico de que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ estén sobre la recta que une las dos masas puntuales. Para ello tomemos momentos de los vectores $\mathbf{f}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{f}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ respecto de un punto fijo O cualquiera. De la relación (2.11) y recordando la definición de la dirección y del sentido del vector producto vectorial, se deduce fácilmente que la condición para que $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ estén sobre la recta que une las dos masas es:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_2 = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{a}_2 = 0 \qquad (4.10)$$

En realidad, es necesario agregar esta condición a la relación (3.2), para completar la expresión matemática de las experiencias de Mach. En otras palabras, a los conceptos de fuerza y masa debemos agregar el concepto físico de *momento de una fuerza*, que aparece en la relación (4.10) y que representa el hecho experimental de que las fuerzas de interacción entre dos masas puntuales están sobre la recta que las une, cualquiera sea el mecanismo de interacción en cuestión (atención: el caso de interacción electromagnética requiere consideración especial).

De la relación (4.10) deducimos otro teorema de conservación. Efectivamente, derivemos respecto del tiempo la relación

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{v}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \times m_2\mathbf{v}_2$$

Pero $\mathbf{v}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \times m_2\mathbf{v}_2 = 0$, por ser producto vectorial entre vectores paralelos. Por lo tanto, teniendo en cuenta (4.10) y la definición de impulso, tenemos:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_2 = 0$$

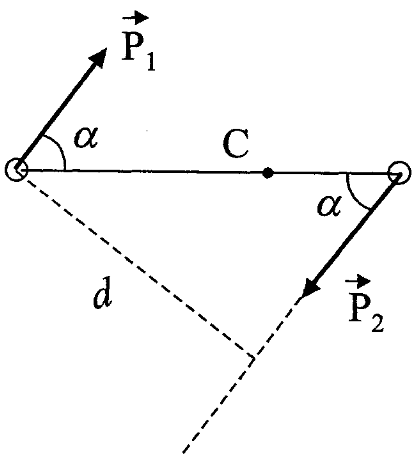
O sea, la suma de momentos de los vectores impulso respecto de un punto fijo cualquiera es una constante, independiente del tiempo, independiente del mecanismo de

interacción y fijada exclusivamente por las condiciones iniciales. Esa suma se denomina *impulso angular total* del sistema de las dos masas interactuantes; cada uno de los términos **r x P** recibe el nombre de impulso angular de la masa en cuestión

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_1^0 \times \mathbf{P}_1^0 + \mathbf{r}_2^0 \times \mathbf{P}_2^0 = \text{cte.} \qquad (4.11)$$

Éste es el teorema de conservación del impulso angular. Para evitar confusiones, se llama a **P** impulso "lineal".

Tal como sucede con la relación (4.1), la (4.11) tiene significado aun en el caso de que hubiera cesado la interacción. La expresión (4.10), en cambio, sólo tiene sentido mientras dura esta interacción.



Para comprender mejor el significado de este teorema de conservación, consideremos dos masas interactuantes, descriptas desde el sistema fijo a su centro de masa. Ya hemos dicho que ese sistema se caracteriza por ser simétrico respecto de los impulsos lineales de las dos masas: $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$ (página 111). Los impulsos lineales forman, entonces, en ese sistema lo que se denomina un "par de vectores" (dos vectores de resultante nula, o sea, de igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos). Consideremos el momento total de ese par, respecto de un punto O: $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2$. Cambiemos el centro de momentos al punto O'. De acuerdo con la regla de transformación (2.12), tendremos para el nuevo momento:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 - \mathbf{OO'} \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 - \mathbf{OO'} \times \mathbf{P}_2 = \mathbf{L} - \mathbf{OO'} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{L}$$

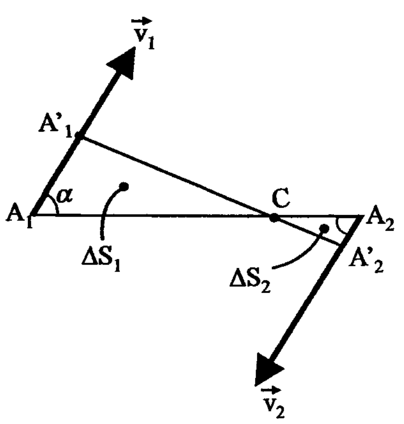
por ser $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0$. Esto es válido en general: el momento de un par de vectores es independiente del centro de momentos. En otras palabras, un par de vectores tiene "un" momento, sin necesidad de especificar respecto de qué punto: el par está caracterizado unívocamente por ese único vector momento. Ésta es una de las utilidades fundamentales del vector momento. Es fácil demostrar que el vector momento de un par es perpendicular al plano definido por el par, teniendo módulo $|\mathbf{L}| = Pd$, y sentido dado por la regla del tirabuzón. El momento de un par será nulo si $\alpha = 0$, o sea, si los vectores están sobre una misma recta de acción (relación (4.10)).

Volviendo a nuestro caso del par de impulsos, reconocemos entonces que, en el sistema centro de masa, el impulso angular total **L** es independiente del centro de momentos. En ese sistema de coordenadas, dos masas interactuantes tienen "un solo" impulso angular cualquiera sea el centro de momentos. Ésta es otra propiedad fundamental que caracteriza y distingue al sistema centro de masa. En cualquier otro sistema, en cambio, el impulso angular total depende del centro de momentos respecto del cual se lo toma.

Siendo **L** = cte., lo será su dirección y, con ello, el plano definido por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, o $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Esto representa en forma muy intuitiva una tremenda limitación en las posibilidades de movimiento de las masas interactuantes: cualquiera sea el mecanismo de interacción, el movimiento de dos masas interactuantes siempre es *plano*, visto desde el sistema centro de masa.[15] El plano está fijado por la dirección del vector **L**, normal a él. Por otra parte, la constancia del sentido de **L** indica que el sentido (de giro) del movimiento mutuo de las masas en ese plano siempre es el mismo, cualquiera sea la interacción. Ese plano y el sentido de movimiento en él están enteramente fijados por las condiciones iniciales (los vectores $\mathbf{v}_1^0$ y $\mathbf{v}_2^0$ iniciales). La interacción mutua de los dos cuerpos, cualquiera sea ésta, nunca puede sacarlos fuera de ese plano, ni podrá invertir el sentido de su movimiento. Este resultado es la ilustración más cabal del significado físico del impulso angular y de su conservación.

Consideremos el caso particular de **L** = 0 (siempre contemplamos el sistema centro de masa –en otro sistema **L** = 0 no tendría sentido físico, pues allí **L** depende enteramente del punto que se tome como centro de momentos–). Ello quiere decir que $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ están sobre la recta de unión de las dos masas (recuérdese lo dicho respecto de la relación (4.10)). En este caso particular, el movimiento no es plano, sino rectilíneo. Y la conservación de **L** nos dice que si un movimiento de dos masas en interacción es inicialmente rectilíneo, siempre seguirá siendo rectilíneo, cualquiera sea la interacción entre las dos masas.

Obsérvese las notables pero conceptualmente simples limitaciones geométricas que introduce el teorema de conservación del impulso angular. La conservación del impulso lineal no trae aparejada ninguna limitación que sea expresable geométricamente en una forma tan sencilla (excepto la constancia de la velocidad del centro de masa). Por ello, el significado físico del vector impulso angular es en realidad más simple y más "visible" que el del impulso lineal. Sin embargo, debido a una presentación didáctica inadecuada en la mayoría de los libros elementales, el impulso angular suele aparecer como algo "mucho menos entendible" que el impulso lineal.



Analicemos ahora otra consecuencia geométrica, relacionada con la conservación del *módulo* del impulso angular. Consideremos, siempre en el sistema centro de masa, el segmento $\overline{A_1A_2}$ que une las dos masas interactuantes. Como el centro de masa C es fijo en ese sistema, estando siempre sobre el segmento $\overline{A_1A_2}$, éste debe *rotar* alrededor de C cuando las masas se desplazan. La constancia del sentido de **L** equivale, como ya dijimos, a la constancia del sentido de rotación del segmento $\overline{A_1A_2}$ alrededor del centro de masa. La constancia del módulo conduce al siguiente "teorema de las áreas".

15. Visto desde un sistema cualquiera, ese plano se desplazará con velocidad constante $\mathbf{V}_c$ y los impulsos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ ya no serán más coplanares.

Sean los triángulos CA_1A_1' y CA_2A_2'. Sus áreas son:

$$\Delta S_1 = \frac{\overline{A_1C}\ \overline{A_1A_1'}}{2}\,\text{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad \Delta S_2 = \frac{\overline{CA_2}\ \overline{A_2A_2'}}{2}\,\text{sen}\alpha$$

Pero $\overline{A_1A_1'} = v_1\Delta t$ y $\overline{A_2A_2'} = v_2\Delta t$. Entonces

$$m_1\Delta S_1 + m_2\Delta S_2 = \frac{m_1\,\overline{A_1C}\,v_1 + m_2\,\overline{CA_2}\,v_2}{2}\,\text{sen}\alpha\ \Delta t =$$
$$= \frac{m_1v_1\left(\overline{A_1C} + \overline{CA_2}\right)}{2}\,\text{sen}\alpha\ \Delta t = \frac{P_1\,\overline{A_1A_2}\,\text{sen}\alpha}{2} = \frac{|L|}{2}\Delta t \quad \text{ya que}\ m_1v_1 = m_2v_2$$

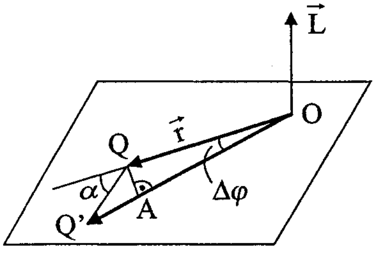
O sea:

$$m_1\frac{dS_1}{dt} + m_2\frac{dS_2}{dt} = \text{cte.} \qquad (4.12)$$

dS/dt se llama "velocidad areolar" del cuerpo respecto del centro de masa. La relación (4.12) representa una ulterior limitación geométrica para el movimiento de las dos masas.

Veamos ahora la relación genérica entre el impulso angular de un cuerpo puntual (respecto de un punto fijo O) y el momento de la fuerza sobre ese cuerpo (respecto del mismo punto fijo O):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\,\mathbf{x}\,m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\,\mathbf{x}\,m\mathbf{a} + \mathbf{v}\,\mathbf{x}\,m\mathbf{v} = \mathbf{r}\,\mathbf{x}\,m\mathbf{a} = \mathbf{M} \qquad (4.13)$$



O sea,

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \Delta\mathbf{L} = \int_{t_0}^{t}\mathbf{M}(t')\ dt'$$

La variación del impulso angular de un cuerpo (respecto de un punto) está dada por la integral respecto del tiempo del momento de la fuerza exterior sobre el cuerpo (respecto de ese mismo punto).

Analicemos nuevamente la expresión del impulso angular de un cuerpo, respecto de un punto O:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\ \mathbf{x}\ m\mathbf{v}, \qquad |\mathrm{L}| = r\,m\,v\,|\text{sen}\,\alpha|$$

En un intervalo de tiempo Δt el móvil se desplazó en $\overline{QQ'} = v\Delta t$ en la dirección de **v**. Recordando la expresión (2.13) de la velocidad angular: $\Omega = v\,\text{sen}\alpha/r$, y multiplicando numerador y denominador por mr tenemos:

$$\Omega = \frac{m\ r\,\text{sen}\alpha}{mr^2} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}$$

O sea

$$|\mathbf{L}| = m\,r^2\Omega$$

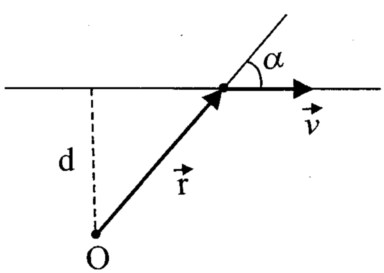
Esta relación justifica la denominación de **L** como impulso "angular": si $|L| = 0$ respecto de un punto O, el cuerpo no rota (el radiovector no gira) alrededor de ese punto.

El producto $I = m\,r^2$ aparece a menudo en física y se lo llama momento de inercia de la masa puntual respecto del punto O. Es fácil comprobar que la relación entre L y Ω se puede escribir en forma vectorial

$$\mathbf{L} = \mathrm{I}\ \Omega \qquad (4.14)$$

Obsérvese la analogía formal entre las dos expresiones:

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{L} = I\ \Omega$$



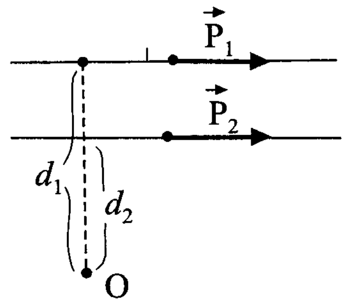
Pero recuérdese siempre que Ω, **L** e I dependen del centro de momentos O.

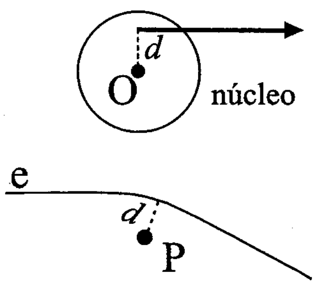
Para terminar analicemos el impulso angular y la relación (4.14) para el movimiento rectilíneo uniforme. Esto es muy útil pues muchas veces existe en el estudiante la impresión de que el impulso angular sólo tiene que ver con movimientos de rotación "puros". Un movimiento rectilíneo también representa un movimiento de "rotación". Fijemos un centro de momentos O; el radiovector **r** rota a medida que el cuerpo puntual avanza. Lo que lo diferencia de movimientos de rotación "puros" es que el radiovector nunca llega a dar una vuelta completa de 2π, aun si el móvil va de $-\infty$ a $+\infty$. La velocidad angular tendrá por módulo $\Omega = v\text{sen}\ \alpha/r = v/d\ \text{sen}^2\ \alpha$ donde $d = r\ \text{sen}\,\alpha$ es la distancia de centro.

También el momento de inercia $I = m\,r^2 = m\,d^2/\text{sen}\,\alpha$ depende de la posición, o sea, del tiempo. Pero obsérvese que, en cambio, el producto $|L| = I\,|\Omega| = m\,v\,d$ es constante en el tiempo. La dirección y sentido del impulso angular también permanecen constantes. En otras palabras, un movimiento rectilíneo uniforme tiene impulso angular constante, respecto de un punto dado.

Obsérvese que dos movimientos rectilíneos de igual vector impulso lineal $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ (o sea, de igual dirección, sentido y módulo), pero con distinta recta de movimiento, tendrán impulsos angulares diferentes respecto de un mismo punto. El impulso angular será tanto mayor cuanto más lejos de O pase la trayectoria rectilínea (o sea, cuanto mayor sea d). En

particular, será nulo si la recta pasa por O. Esto quiere decir que, para movimiento rectilíneo, el impulso angular respecto de un punto dado nos da una idea de la posición de la recta de movimiento respecto de ese punto. Esto no sólo vale para el módulo de L, sino también para su dirección, puesto que ésta define al plano que contiene la recta de movimiento. Obsérvese esta notable propiedad geométrica del impulso angular, que permite individualizar distintos movimientos rectilíneos de igual **P** entre sí. En particular, el cociente $|L|/|P|$ se denomina *parámetro de impacto* respecto del centro de momentos, puesto que nos da la distancia d de la recta de movimiento a ese centro de momentos.





Este concepto tiene importancia en la interacción entre partículas del dominio atómico o nuclear. En particular, cuando se dice que un núcleo "emite una partícula con impulso angular", significa que esa partícula no ha salido del centro del núcleo (su recta de acción después de la interacción no pasa por ahí), sino de un punto más periférico. Igualmente, una interacción electromagnética entre un electrón y un protón "con impulso angular" significa que el electrón pasará a cierta distancia del protón.

f) Movimiento de un satélite. Leyes de Kepler

Consideremos el movimiento de un satélite artificial alrededor de la Tierra. La aceleración de este movimiento estará dada por la expresión (3.14)

$$a = \frac{\gamma M}{r^2} = g \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

donde R es el radio de la Tierra y r es el radio vector que ubica al satélite. Su dirección es la del vector **r** y su sentido, hacia el centro de la Tierra.

Supongamos que el satélite tiene una cierta velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ dada por la última etapa del cohete que lo puso en órbita. Como $M>>m$, de acuerdo con la (4.31), el centro de masa del sistema de las dos masas coincidirá prácticamente con la posición de M (recuérdese por lo dicho en el Cap. 3.c que podemos considerar la Tierra como un cuerpo puntual con su masa concentrada en su centro), y un sistema fijo a la Tierra será el "sistema centro de masa".

El teorema de conservación del impulso angular nos permite afirmar que el movimiento será plano y que el plano del movimiento estará dado por el plano definido por el vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y el radio vector inicial $\mathbf{r}_0$. El sentido del movimiento del satélite en ese plano será siempre el mismo, dado por el sentido inicial.

Consideremos el caso particular en que $\mathbf{v}_0$ sea perpendicular al radio vector. En ese caso, en el instante inicial, la aceleración es perpendicular a $\mathbf{v}_0$. En otras palabras, la aceleración es únicamente aceleración centrípeta (2.8 a):

$$a = \frac{v_0^2}{\rho}$$

O sea, el satélite se moverá en ese instante inicial sobre una trayectoria curvada hacia el centro de la Tierra y con radio de curvatura

$$\rho = \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2 r^2}{\gamma M} = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

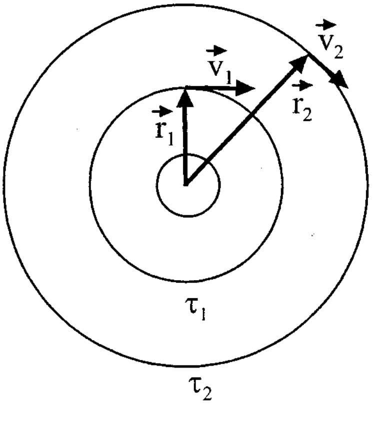
Para una determinada y única velocidad inicial, este radio de curvatura será igual a la distancia del satélite al centro de la Tierra, $\rho = r$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{r}} \qquad (4.15)$$

En ese caso (y sólo en él), el satélite continuará moviéndose según una circunferencia de radio r con velocidad constante v_0 (puesto que en todo momento siempre tendrá la misma aceleración centrípeta). Obsérvese que esa única velocidad v_0 es independiente de la masa. Comparando con la (3.16), observamos que $v_0 = v_{\text{escape}}/\sqrt{2}$.

A cada punto del espacio que rodea a la Tierra le corresponde, entonces, una velocidad, perpendicular al radiovector y dada por (4.15), que representa la velocidad (constante) que debe tener un satélite para orbitar en una circunferencia con movimiento uniforme.

El período de revolución (tiempo para dar una vuelta completa) es:



$$\tau = \frac{2\pi r}{v_0} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{\gamma M}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{R^2 g}}$$

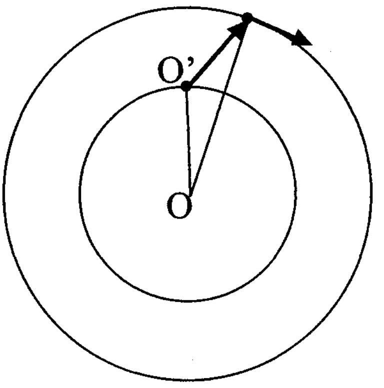
Si tenemos dos satélites en órbitas circulares de radios r_1 y r_2, vale:

$$\frac{v_{01}^2}{v_{02}^2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{y} \quad \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad (4.16)$$

Obsérvese que esta relación es independiente de las masas m_1 y m_2 de los satélites. Cuanto más lejos de la Tierra está un satélite, tanto más lentamente se desplaza en el espacio y tanto más largo es su período de revolución.

La velocidad angular del satélite respecto del centro de la Tierra es, según la (2.13), $\Omega = (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{r})/r^2$. Como $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}$, $\operatorname{sen}\alpha = 1$ y $|\Omega| = v_0/r$, tenemos la relación, para dos satélites:

$$\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$



Ésta no es la velocidad angular con que un observador sobre la superficie terrestre ve desplazarse un satélite artificial. Esta última se obtiene aplicando la transformación (2.12) a la expresión (2.13); el vector **OO'** en esa transformación será el vector que va del centro de la Tierra al observador.

Veamos algunos datos numéricos. Para un satélite a 300 Km de altura:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} =$$

7,74 10^5 cm/seg = 7,74 Km/seg = 27.900 Km/h

$$\tau = 2\pi\, r\sqrt{\frac{r}{\gamma M}} = 5.440 \text{ seg} = 90 \text{ min}$$

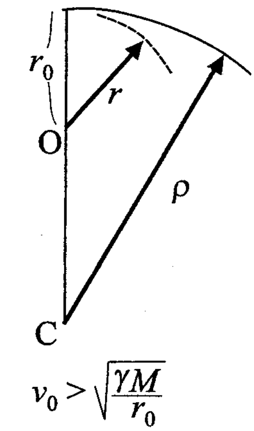
Para dos satélites en órbitas circulares a 6.6 radios terrestres (satélite sincrónico) y 60 radios terrestres (Luna), respectivamente, tenemos:

$v_{o\,6.6\,Re} = 3.1$ Km/seg $\quad v_{o\,60\,Re} = 1$ Km/seg

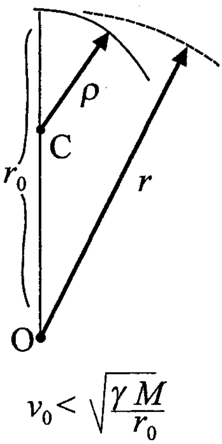
$T_{o\,6.6\,Re} = 24$ horas $\quad T_{o\,60\,Re} = 27{,}3$ días (período de revolución de la Luna)

Para un astronauta que viaja en un satélite, los cuerpos carecen de peso, por la misma razón por la que carecen de peso los objetos en un proyectil o un avión que sigue una parábola de tiro: como el movimiento es independiente de la masa, todos los objetos inicialmente en reposo mutuo dentro de un satélite siguen el mismo movimiento visto desde la Tierra, por tener igual velocidad inicial. Por lo tanto, sus distancias relativas permanecen constantes. Un objeto abandonado en reposo en el aire dentro de la cabina permanecerá "flotando" indefinidamente (por no variar su posición relativa a la cabina). Para el astronauta, su satélite se comporta como un sistema inercial libre de campo gravitatorio. Por esta razón es tan importante para la astronáutica estudiar las reacciones fisiológicas del hombre en ausencia de la gravedad.

Discutamos por último en forma cualitativa el caso en que la velocidad inicial del satélite (siempre supuesta perpendicular al radio vector) no sea igual a la velocidad (4.15) correspondiente a una órbita circular.



1er caso: $v_0 < \sqrt{\gamma M / r}$. En este caso, el radio de curvatura instantáneo inicial de la órbita es



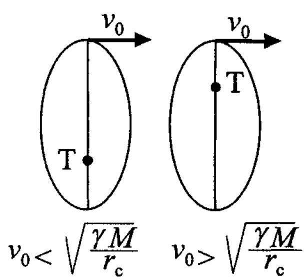
$$\rho = \frac{v_0^2}{a_c} = \frac{v_0^2 r^2}{\gamma M} = \frac{v_0^2 r}{\gamma M} r$$

(a_c es la aceleración centrípeta real, dada por la fuerza gravitatoria). Como $v_0^2 r / \gamma M < 1$ por hipótesis, tenemos $\rho < r$. O sea, la órbita será más curvada que una circunferencia de radio r.

2do caso: $v_0 > \sqrt{\gamma M / r}$. Tendremos $\rho > r$; en ese caso la órbita es menos curvada que la circunferencia de radio r.

En ambos casos se puede demostrar, a partir de la ecuación de movimiento (3.14), que las órbitas completas son elipses. El centro de la Tierra está en uno de sus focos, y la dirección del radio vector inicial fija la dirección del eje mayor de la elipse. Esto es la "Primera Ley de Kepler", formulada originalmente para el caso Sol-planetas. Para estas órbitas elípticas sigue valiendo la relación (4.16)

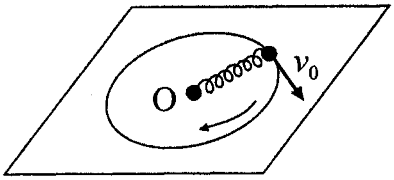
$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

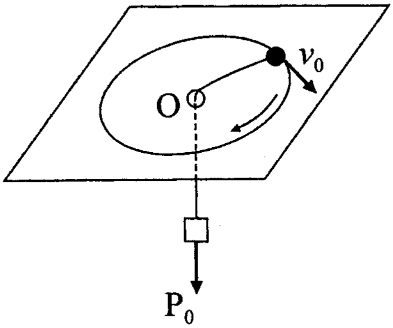


("Tercera Ley de Kepler"), donde r_1 y r_2 son ahora los semidiámetros mayores de las elipses. Hay un cierto límite superior para v_0 (siempre supuesta perpendicular al radio vector), más allá del cual las órbitas no son más elípticas, sino hiperbólicas. Esto querrá decir que el satélite se escapa de la Tierra (pues la hipérbola llega al infinito). Para el límite superior, exactamente, la órbita es una parábola.

Para llegar a la "Segunda Ley de Kepler", bastará considerar la relación (4.12) para el caso en que una de las masas (la de la Tierra) es prácticamente infinita. En ese caso, el centro de masa del sistema coincidirá con el de la Tierra, y la velocidad areolar de esta última será cero. Por lo tanto, la velocidad areolar del satélite será constante, y su radio vector barrerá áreas iguales en tiempos iguales. Con esta "ley" se puede mostrar fácilmente que la velocidad de un satélite en el perigeo (punto más cercano a la Tierra) es mayor que en el apogeo (punto más lejano).

Obsérvese que, de las tres leyes de Kepler, una parte de la Primera Ley (la parte que se refiere a órbitas planas) y la Tercera Ley son mera consecuencia del teorema de conservación del impulso angular. Valdrán, por lo tanto, para cualquier tipo de interacción entre dos masas. La Segunda Ley, en cambio, es propia de las interacciones gravitatorias.





Efectivamente, deduzcamos como ejemplo la relación equivalente a la (4.16) para el caso de una masa vinculada a un punto por medio de una fuerza elástica, por un lado, y por medio de una fuerza constante (independiente de **r**), por otro. La forma de realizar esto en la práctica está dada en la figura. Las aceleraciones estarán dadas en ambos casos por las expresiones

$$|a| = \frac{k}{m} r \qquad\qquad |a'| = \frac{P_0}{m}$$

respectivamente (P_0 es el peso del cuerpo que cuelga del hilo). La velocidad para órbitas circulares será, teniendo en cuenta la (2.8a), respectivamente:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, r \qquad\qquad v_0' = \sqrt{\frac{P_0 r}{m}}$$

Obsérvese que en ambos casos la velocidad depende de la masa del cuerpo. Aquí resalta nuevamente la propiedad fundamental de las interacciones gravitatorias, de causar movimientos independientes de la masa de los cuerpos. Para dos masas *iguales*, que se mueven sobre órbitas circulares de radios r_1 y r_2, valdrá entonces la siguiente relación entre los cuadrados de los tiempos de revolución:

fuerza central elástica: $\quad \dfrac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = 1$

fuerza central constante: $\quad \dfrac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \dfrac{r_1}{r_2}$

En ambos casos, cuando las masas son diferentes, los cuadrados de los tiempos de revolución son además proporcionales a las masas. Nótese que las interacciones elásticas dan, para una misma masa, períodos de revolución independientes de las condiciones iniciales (radio). Ocurre, por lo tanto, algo totalmente semejante a lo que ocurre con el período de oscilación de un oscilador armónico (3.22). La independencia entre los períodos en movimientos sujetos a fuerzas elásticas y las condiciones iniciales es una propiedad fundamental que distingue estas interacciones de las demás.

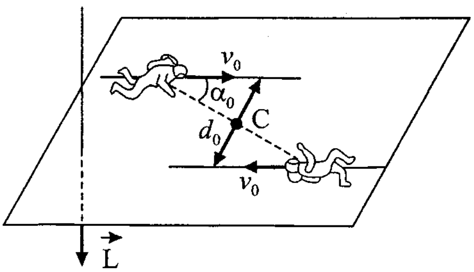
Obsérvese, finalmente, que una fuerza central atractiva, de la forma más general

$$|f| = k(m) r^{-n} \qquad \text{(n positivo o negativo)}$$

en la que la constante $k(m)$ puede depender de la masa (como sucede en el caso gravitatorio), dará una "Tercera Ley de Kepler" en la forma

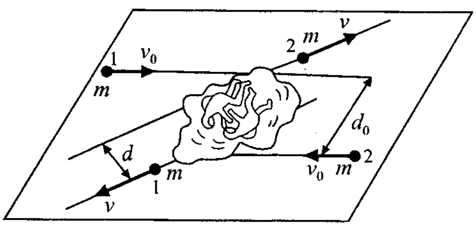
$$\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{k(m_2)}{k(m_1)}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}$$

Aquí se ve claramente que la comprobación experimental de la Tercera Ley de Kepler en la forma (4.16), hecha con los planetas, prueba *dos* cosas a la vez: 1°) la no intervención de la masa de los planetas en la (4.16) demuestra que $k(m)$ es proporcional a m y, por ende, que la masa gravitatoria es proporcional a la masa inerte (3.10); 2°) el exponente 3 al que aparece elevado en la (4.16) el cociente de los radios (o semidiámetros mayores), prueba que $n = 2$, o sea que la intensidad del campo gravitatorio varía en la forma (3.8).



Como ejemplo más directo de la conservación del impulso angular, estudiemos el clásico problema astronáutico del "reencuentro en el espacio". Sean dos astronautas de igual masa $m_1 = m_2 = m$ (supuestos como cuerpos puntuales) que en vuelo libre de propulsión se acercan mutuamente con velocidad v_0. Describamos todo desde el sistema centro de masa. Las trayectorias iniciales serán rectas (ya hemos dicho que para un astronauta que orbita alrededor de la Tierra todo pasa como si se encontrara en un sistema inercial sin campo gravitatorio), siendo d_0 la distancia entre las mismas. Cuando los dos astronautas se han acercado suficientemente, uno de ellos dispara una soga (de masa despreciable), cuyo cabo agarra el otro. Desde ese momento los dos entran en interacción mutua. Ahora los dos proponen reunirse, tirando para ello de la soga y acortando la distancia que los separa. Por lo que hemos visto en 4.b, el punto de reunión será necesariamente el centro de masa C.

Analicemos lo que pasa desde el punto de vista de la conservación del impulso angular. En el instante inicial, ese impulso angular (respecto de cualquier punto, por estar en el sistema centro de masa) tendrá la dirección normal al plano determinado por las dos rectas de movimiento, y su módulo será $|L| = m v_0\, r_0 \operatorname{sen}\alpha_0$. Nuevamente, $d = |L|/|P|$ aparece como "parámetro de impacto" (página 125). La conservación de **L** implica: 1°) que los dos astronautas no pueden salir del plano inicial, por más que tiren de la soga, se agarren mutuamente, se retuerzan o se empujen mutuamente; en cuanto se suelten (cesen de interactuar), saldrán "volando" en direcciones opuestas (siempre $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0$), contenidas en el mismo plano que el inicial; 2°) el sentido de giro de los dos astronautas alrededor de C será siempre el mismo, y no se podrá invertir, por más que "interactúen" los dos;[16] 3°) la relación entre la velocidad **v** de cada uno de los astronautas y la distancia



16. Esto sólo vale considerando a los astronautas como puntuales (página 169).

d entre sus rectas de movimiento después de la interacción estará dada por la conservación del módulo del impulso angular: $v\,d = v_0\,d_0$. Esta relación, por supuesto, también vale durante la interacción: cuanto más se acercan, mayores serán sus velocidades v. En particular, mientras d sea constante (sostienen la soga con longitud fija), ambos astronautas girarán alrededor de C con velocidad angular uniforme $\Omega = 2v/d = 2v_0 d_0/d^2$. ¡Obsérvese que cuando $d \to 0$, $\Omega \to \infty$!

Veamos un ejemplo numérico: sean las condiciones iniciales, en el momento de vincularse con cuerda, $v_0 = 2$ m/seg (¡solamente!) y $d_0 = 25$ m (¡solamente!). Si los dos astronautas se proponen acercarse, tirando y acortando la cuerda, para darse un abrazo ($d = 0{,}5$ m), la velocidad angular con que girarán en el momento de reunirse sería $\Omega = 400$ radianes/seg $\cong$ ¡64 vueltas por segundo! Si en ese momento llegaran a separarse, saldrían volando en sentidos opuestos, a una velocidad de v = 100 m/seg. ¡La fuerza que deberían hacer para mantenerse abrazados en esas condiciones sería $f = mv^2/\rho = mv^2/(d/2) \cong 32$ toneladas fuerza (para $m = 80$ Kg)! En general, es fácil calcular que no tendrían fuerza suficiente ni para acercarse a menos de seis metros.

Es fácil convencerse de por qué el problema de la "puntería" (parámetro de impacto lo más pequeño posible) es tan importante para el caso de "reencuentro" espacial. Por supuesto, estas dificultades se obvian si los astronautas disponen de pequeños sistemas de retropropulsión.

g) Teorema de conservación de la energía mecánica

En los ejemplos dados en el capítulo 3 e, g y h, han aparecido expresiones que eran integrales o constantes de movimiento y que ahora vamos a estudiar en detalle. Eran éstas las siguientes:

Movimiento vertical en el campo gravitacional (página 83):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{\gamma Mm}{r_0} = \text{ cte.}$$

Movimiento bajo la acción de una fuerza elástica (página 89):

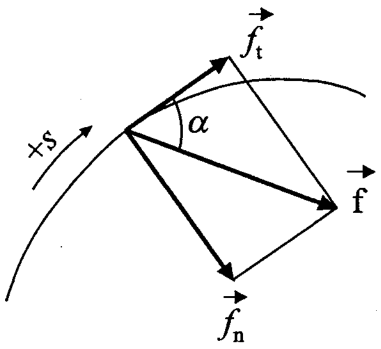
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{ cte.}$$

Movimiento de un péndulo, o tiro en el vacío (página 95):

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,y = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mg\,y_0 = \text{ cte.}$$

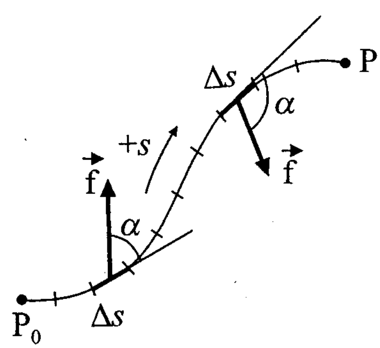
Llamaremos a esta constante de movimiento *energía mecánica total E* de la masa. El sumando $1/2\,mv^2$, que aparece en todos los casos, y que sólo depende de la velocidad instantánea, lo denominaremos *energía cinética T* ; el otro sumando, que depende del tipo de fuerzas en acción y de la posición instantánea, lo denominaremos *energía potencial V*.

Vamos a demostrar la validez completamente general (para el tipo de fuerzas considerado en los ejemplos anteriores) de que $E = T + V$ es una constante de movimiento, independiente del tiempo, dependiente sólo de las condiciones iniciales.



Para eso consideremos un movimiento de un cuerpo puntual cualquiera bajo la acción de una fuerza **f** (resultante de las fuerzas de interacción que actúan sobre el cuerpo). Descompongamos esta fuerza según una componente tangencial y una normal a la trayectoria (en el plano osculador). La componente normal será responsable de la aceleración centrípeta: $a_c = f_n/m$ la cual, a su vez (según lo dicho en el capítulo 2 g), es responsable de la variación de la dirección de la velocidad. En $\mathbf{f_n}$ estarán comprendidas, además, todas las reacciones de vínculo, por ser éstas siempre perpendiculares a la trayectoria (capítulo 3 g). La componente tangencial, en cambio, será responsable de la variación del módulo de la velocidad (2.8b): $dv/dt = f_t/m$. Si llamamos ds al desplazamiento del punto sobre la curva (elemento de arco) tomado positivo en la dirección del movimiento, tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$



Por lo tanto, $d(1/2\,mv^2) = f_t\,ds$. En esta expresión, f_t debe ser tomada como positiva si tiene el mismo sentido que el desplazamiento ds, y como negativa si su sentido es opuesto al movimiento. Ello se debe a que el signo de f_t debe ser igual al signo de dv que representa la variación del módulo de la velocidad.

Integrando sobre la trayectoria, entre dos puntos P_0 y P en los que las velocidades son v_0 y v, respectivamente, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = T - T_0 = \Delta T = \int_{P_0}^{P} f_t\,ds = W \qquad (4.17)$$

La integral que aparece es una integral curvilínea:

$$W = \int_{P_0}^{P} f_t\,ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum f_{t_i} \Delta s_i$$

Se la denomina *trabajo* de la fuerza **f** a lo largo del camino en cuestión. Obsérvese que sólo aparece la componente tangencial

$$f_t = f \cos\alpha$$

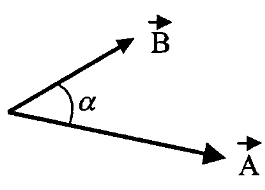
α es el ángulo entre **f** y el vector desplazamiento d**s** (que tiene la dirección del movimiento).

Si $\alpha < \pi/2$, cos $\alpha > 0$, el trabajo de la fuerza será positivo. Si $\alpha > \pi/2$, el trabajo será negativo. En el primer caso se dice que el sistema (el mecanismo de interacción responsable de la fuerza que actúa sobre la masa) "entrega" trabajo; en el otro caso se dice que el sistema "recibe" (o "absorbe") trabajo. Hay mecanismos de interacción que pueden entregar o recibir trabajo (o sea, realizar trabajo positivo o negativo), como las interacciones gravitatorias, elásticas, electromagnéticas, etc. Pero también hay mecanismos de interacción, los cuales, por su naturaleza intrínseca, sólo pueden recibir trabajo (realizar trabajo negativo). Las fuerzas provenientes de este tipo de interacciones se denominan *fuerzas disipativas*. Las fuerzas de frotamiento dinámico son un ejemplo típico.

La relación (4.18) nos dice que la variación de la energía cinética de un cuerpo puntual es igual al trabajo de la resultante de todas las fuerzas que sobre él actúan. Si en todo momento f_t es del mismo sentido que el movimiento, será $W > 0$ y $T > T_0$: el móvil ha aumentado su energía cinética; ese aumento es igual al trabajo entregado por el sistema mecánico de interacción responsable de la fuerza **f**. Si, en cambio, f_t es opuesta al desplazamiento, $W < 0$ y $T < T_0$, el móvil ha disminuido su energía cinética. Esa disminución es igual al trabajo recibido (o absorbido) por el sistema responsable de la fuerza **f**.

Recuérdese que en **f** pueden estar incluidas todas las reacciones de vínculo, ya que hemos visto que éstas son siempre perpendiculares a la trayectoria, no interviniendo, entonces, en la expresión del trabajo. En otras palabras: las reacciones de vínculo no realizan trabajo.

Aquí conviene introducir una nueva operación del cálculo vectorial: el producto escalar. La cantidad $f_t\, ds = f\, ds \cos\alpha$ se denomina *producto escalar* entre el vector **f** y el vector desplazamiento d**s**. En general, dados dos vectores **A** y **B**, definimos como producto escalar al número (escalar) que se obtiene como producto de sus módulos y el coseno del ángulo entre los vectores multiplicandos. El producto escalar se indica en la forma:

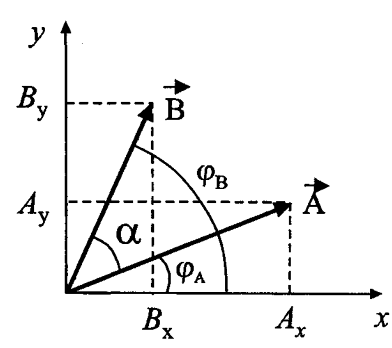


$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |A|\,|B| \cos\alpha \qquad (4.18a)$$

Obsérvese que **A** • **B** = **B** • **A**, y que es distributivo con respecto a la suma. Si $\alpha > \pi/2$, **A** • **B** < **0.** Un producto escalar es nulo si:

a) es nulo uno de los multiplicandos, o si

b) los vectores son perpendiculares entre sí.



Obsérvese además que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = |A|^2$. O sea, el módulo de un vector es la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo.

Corresponde ahora, tal como lo hicimos con el producto vectorial, expresar el producto $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ en función de las componentes de **A** y **B**, o sea, dar su definición analítica. Consideremos los vectores en el plano *x*, *y*. Observando la figura resulta:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = |A||B| \cos(\varphi_A - \varphi_B) =$$

$$= |A||B| \left(\cos\varphi_A \cos\varphi_B + \operatorname{sen}\varphi_A \operatorname{sen}\varphi_B\right) =$$

$$= |A||B| \left(\frac{A_x}{|A|}\frac{B_x}{|B|} + \frac{A_y}{|A|}\frac{B_y}{|B|}\right) = A_x B_x + A_y B_y$$

Si los vectores están en el espacio, se puede demostrar que:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (4.18b)$$

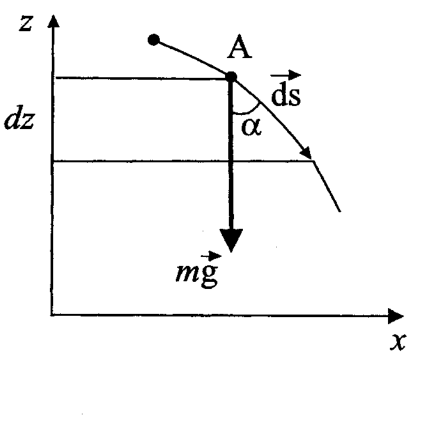
Ésta es la expresión analítica general del producto escalar.

En particular, el trabajo de una fuerza **f** a lo largo de una curva será, entonces:

$$W = \int_{P_0}^{P} f_t ds = \int_{P_0}^{P} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{s} = \int_{P_0}^{P} \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right)$$

Los diferenciales *dx*, *dy* y *dz* no son cualesquiera, sino que representan las proyecciones del elemento de arco de la trayectoria sobre los ejes.

Hasta ahora, *T* y *W* son meras definiciones, y por el momento no le hemos encontrado ningún significado físico especial. Éste aparece en el caso en que la integral (4.17) $W = \int_{P_0}^{P} f_t ds$ no depende del camino, sino sólo de la posición de los extremos P_0 y *P*. El primer requisito para que esto pueda ocurrir es que **f** no dependa explícitamente del tiempo sino sólo de la posición, o sea que **f** sea un "campo de fuerzas" (interacciones que sólo dependen de la distancia mutua entre los cuerpos en interacción). Mostraremos que, en los tres ejemplos de interacciones estudiados en el capítulo 3 e, f y h, efectivamente *W* es *independiente del camino* seguido por el cuerpo cuando va de P_0 a *P*.



a) Campo gravitatorio en las vecindades de la superficie (caso del tiro en el vacío o del péndulo): $\mathbf{f} = m\mathbf{g} =$ cte. (independiente de la posición). Entonces, para una trayectoria cualquiera de P_0 a *P* tendremos:

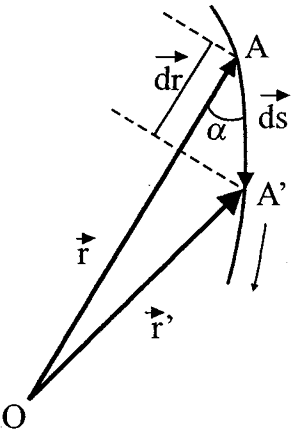
$$f_t\, ds = mg \cos\alpha \; ds = - mg \; dz$$

(respecto del signo, obsérvese, según el dibujo, que z se cuenta hacia arriba, pero ds hacia "abajo", en la dirección del movimiento).

O sea:

$$W = -\int_{z_0}^{z} mg\, dz' = -\left(mg\, z - mg\, z_0\right)$$

cualquiera que haya sido el camino (sólo interviene la altura del punto final y del punto inicial).



b) Campo elástico: $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$. Entonces, $f_t\, ds = f \cos\alpha \; ds = kr \cos\alpha \; ds$. Pero $ds \cos\alpha = -dr$ (por el signo véase el dibujo: al pasar de A a A' el radio vector disminuye en longitud).

Por lo tanto,

$$\int_{P_0}^{P} f_t ds = -k \int_{P_0}^{P} r dr = -\left(\frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{2}kr_0^{\;2}\right)$$

independiente del camino seguido (depende sólo de la distancia del punto inicial y final al centro O, al cual está fijo el resorte).

c) Campo gravitatorio general: $f_t\, ds = f \cos\alpha \; ds = \gamma\, Mm/r^2$. O sea:

$$\int_{P_0}^{P} f_t ds = -\gamma\, Mm \int_{P_0}^{P} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{\gamma\, Mm}{r} - \frac{\gamma\, Mm}{r_0}\right] = -\left[\left(-\frac{\gamma\, Mm}{r}\right) - \left(-\frac{\gamma\, Mm}{r_0}\right)\right]$$

En los tres casos aparece una función escalar de la posición $V(x,y,z)$, tal que el trabajo de la fuerza a lo largo de un camino entre un punto inicial P_0 y un punto final P sea igual a la diferencia, cambiada de signo, de los valores de esa función en los extremos de la trayectoria, cualquiera haya sido ésta:

$$W = \int_{P_0}^{P} f_t ds = -\left[V(x, y, z) - V(x_0, y_0, z_0)\right] \qquad (4.19)$$

Esta función se llama *energía potencial* de la masa m en el campo de fuerzas en cuestión. Un campo de fuerzas en el cual el trabajo entre dos puntos no depende del camino seguido, sino sólo de los extremos, se denomina un *campo conservativo* (en realidad habría que decir que se trata de interacciones conservativas). Para un campo conservativo se puede definir entonces una función escalar, con la cual se puede calcular

el trabajo de la fuerza entre dos puntos mediante la (4.19), sin necesidad de conocer la trayectoria seguida por la masa.

Obsérvese que a la función $V(x,y,z)$ se le puede sumar una constante C arbitraria sin por ello cambiar las condiciones físicas: como en la (4.19) sólo aparece definida la *diferencia* entre los valores de la energía potencial, esa constante se cancela en esa expresión. Por ello se dice que la energía potencial está definida "a menos de una constante". El sentido negativo en la (4.19) proviene de una convención.

La función potencial de una masa m en los tres casos de campo de fuerzas conservativos analizados arriba es, entonces:

a) Campo gravitatorio (la masa M en el origen):

$$V(x,y,z) = -\frac{\gamma Mm}{r} + C = -\frac{\gamma Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$$

b) Masa bajo la acción de un resorte (el punto fijo en el origen de coordenadas):

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}k\,r^2 + C = \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right) + C$$

c) Campo gravitatorio constante (cerca de la superficie terrestre):

$$V(x,y,z) = mg\,z + C \qquad \text{(eje } z \text{ vertical hacia arriba)}$$

La constante C es arbitraria en los tres casos. Por esto, sólo tiene significado físico la diferencia o variación de energía potencial y no su valor absoluto. En el primer caso, haciendo $r \to \infty$, vemos que $C = V(\infty)$, potencial en el infinito. Podemos fijar entonces un valor arbitrario para el potencial en el infinito. En particular podemos hacer $C = V(\infty) = 0$. En el segundo caso, $C = V(0)$, potencial en el origen. En el tercer caso, C es el potencial en el plano $z = 0$; como C es arbitrario, podemos elegir como "altura cero" o nivel de referencia cualquier plano horizontal.

Cuando un cuerpo está sujeto a varias interacciones simultáneamente, todas ellas conservativas, es fácil ver que la energía potencial total es *suma algebraica* de las energías potenciales del cuerpo en cada uno de los campos de fuerza calculadas en forma individual.

Para una masa que se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, vale, según (4.18) y (4.19): $W = T - T_0 = -(V - V_0)$. O sea

$$T + V = T_0 + V_0 = E = \text{cte.} \qquad (4.20)$$

Esta constante se llama *energía mecánica total* de la masa en el campo de fuerzas conservativo. La relación (4.20) representa el teorema de conservación de la energía mecánica. Este teorema vale sólo para el caso de fuerzas conservativas. El valor constante de la energía mecánica total está fijado exclusivamente por las condiciones iniciales. Como la energía potencial, la energía total también está definida a menos de una

constante (arbitraria, pero cuyo valor debe coincidir con el que se adoptó para la energía potencial).

El teorema de conservación de la energía mecánica se suele expresar diciendo que, cuando una masa puntual se mueve bajo la acción de campos de fuerza conservativos, su energía cinética aumenta o disminuye "a expensas" de su energía potencial: $\Delta T = -\Delta V$.

Como los otros teoremas de conservación, el de la energía mecánica introduce grandes limitaciones en el movimiento posible de cuerpos puntuales en interacción. Pero nótese bien que, a diferencia de lo que sucede con la conservación del impulso lineal o angular, el teorema de conservación de la energía mecánica sólo vale para un grupo *limitado* de interacciones: las conservativas. Las reacciones de vínculo, cuyo trabajo siempre es nulo, por ser siempre perpendiculares a los desplazamientos sobre los vínculos, no intervienen en la expresión de la energía mecánica de un cuerpo y, por lo tanto, pueden ser agregadas *a piacere* a las fuerzas conservativas que actúan sobre un cuerpo, sin alterar la validez de (4.20).

Obsérvese que en los ejemplos de campos conservativos dados arriba y, en particular, en la formulación (4.20) del principio de conservación de la energía mecánica, siempre se trataba de una masa (puntual) en interacción con otro cuerpo que permanecía en reposo (Tierra), o sea, cuya masa necesariamente debía ser muchísimo mayor. Cuando esta condición no se cumple, es decir, cuando tenemos una interacción conservativa entre dos cuerpos de masas comparables entre sí, conviene describir todo desde el sistema centro de masa e introducir los conceptos de energía cinética y potencial del *sistema* de las dos masas en interacción. La energía cinética del sistema será la suma de las energías cinéticas de las dos masas en cuestión. El teorema de conservación de la energía mecánica sigue siendo válido en este caso para interacciones conservativas, cuando se lo formula para las energías cinética y potencial de todo el sistema.

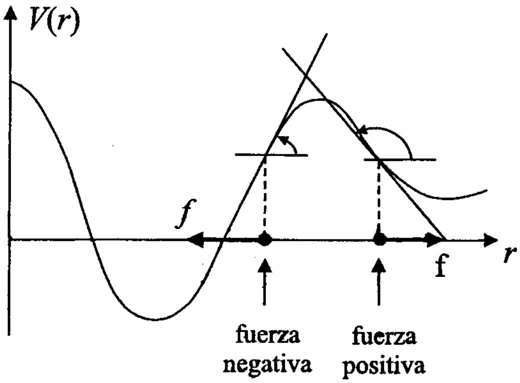
Consideremos nuevamente la relación (4.20). De ella deducimos $T = \frac{1}{2} mv^2 = E - V$. O sea:

$$v = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} \qquad (4.21)$$

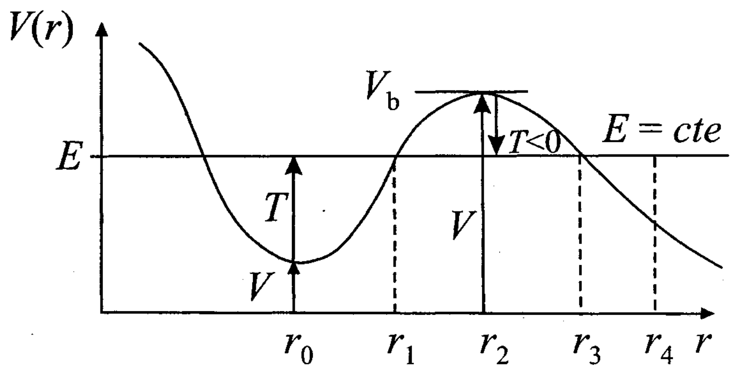
En esta expresión, V es una función del espacio y E es una constante dada por las condiciones iniciales. Obsérvese nuevamente que la constante aditiva debe ser la misma en V y en E, para que el valor de la velocidad no dependa de ella. Analicemos la representación gráfica de $V = V(r)$ para el caso de un movimiento en una sola dimensión. Ante todo, es fácil comprobar a partir de la (4.19) que la pendiente de la curva, cambiada de signo, nos da la fuerza que actuará sobre una masa colocada en la posición r en cuestión: $f = -\partial V/\partial r$.

Si ahora trazamos en el gráfico de $V(r)$ la línea $E =$ cte., valor éste fijado por las condiciones iniciales, observamos, en un punto como el r_0, que la distancia entre la curva V(r) y la recta $E =$ cte. representa la energía cinética que el móvil tendrá en ese lugar r_0. En un punto como el r_1, la energía cinética es cero y, con ello, la velocidad: es un punto en el que el móvil invierte su marcha. En un punto como el r_2 la energía cinética para el valor dado de E sería negativa y, con ello, la velocidad sería imaginaria. Ello querrá decir que el móvil no puede llegar nunca al punto r_2 (ni a ninguno comprendido entre r_1 y r_3). Para un punto como el r_4, nuevamente $T > 0$; se trata de una región permitida. Pero si el móvil estuvo inicialmente en r_0, tampoco podrá llegar nunca a r_4, pues no puede pasar por

los puntos intermedios (continuidad del movimiento). Y viceversa, un móvil con energía total E, inicialmente en r_4, nunca podrá llegar a la región a que pertenece r_0. Por todo esto, el "montículo" que presente la curva $V = V(r)$ en la zona de r_2 se llama "barrera de potencial", y el "valle" alrededor de r_0, "pozo de potencial". Para pasar por una barrera de potencial, el móvil debe tener una energía total $E > V_b$ donde V_b es la "altura de la barrera", o sea, el valor máximo de V. Igualmente, para salir del pozo de potencial hay que darle al cuerpo una energía E que sea mayor que V_b.[17] Estas consideraciones permiten utilizar el gráfico de $V(r)$ para un estudio analítico del movimiento, en una



forma muy simple y visible. Si bien la mera observación de este gráfico nunca nos permitirá decir algo sobre el movimiento en sí (posición y velocidad en función del tiempo), nos da información muy útil sobre la región en que se moverá un cuerpo de una dada energía total (o sea, para dadas condiciones iniciales), y sobre la velocidad que tendrá en un punto dado. Obsérvese que, para estos gráficos, un cambio en la constante arbitraria que interviene en V y en E implica un simple desplazamiento de toda la curva $V = V(r)$ y de la recta E = cte. hacia arriba o hacia abajo.



En puntos como el r_0 o el r_2, en los que la función $V(r)$ pasa por valores extremos, $-\partial V/\partial r = 0$ y con ello $f = 0$. Se trata de posiciones de equilibrio: en ellas, el cuerpo permanece en reposo si su velocidad inicial allí es nula. En particular, en el punto r_0 ("valle" del pozo de potencial) habrá equilibrio *estable*, pues para todo pequeño apartamiento δr, hacia uno u otro lado de r_0, siempre aparece una fuerza $f = -\partial V/\partial r$ cuyo sentido está dirigido *hacia* el punto de equilibrio (fuerza de "restitución"). En un punto como el r_2 ("cresta" de una barrera de potencial), en cambio, la fuerza que aparece en un pequeño desplazamiento tenderá a alejar a la masa aún más del punto de equilibrio. En este caso se trata de un equilibrio *inestable*.

Finalmente, téngase cuidado en no exagerar la imagen intuitiva de este tipo de análisis cualitativo, basado en el gráfico de $V = V(r)$. ¡Es frecuente el error de concebir una partícula en un pozo de potencial como "hamacándose ida y vuelta por la curva $V = V(r)$",

17. "Darle una energía E mayor que V_b" significa, según la (4.20), que en el instante inicial es necesario darle suficiente velocidad inicial como para que $T_0 + V_0 = E > V_b$.

o de imaginar una partícula "bajar por una barrera de potencial"! En ambos casos, la partícula se mueve invariablemente sobre el eje *r*.

Nos corresponde decir algo sobre unidades de trabajo y energía. Las dimensiones de trabajo o energía son:

$$[W]=[f][ds]=M\,L^2\,T^{-2}$$

En el sistema cgs, la unidad de energía es el "Ergio":

$$1 \text{ “erg”} = 1 \text{ dina x } 1 \text{ cm} = 1 \text{ g cm}^2 \text{ seg}^{-2}$$

Esta unidad es muy pequeña respecto de las energías usuales en la técnica. En el sistema MKS, la unidad es el "Julio" o "Vatio-segundo":

$$1 \text{ Julio} = 1 \text{ Newton x } 1 \text{ m} = 1 \text{ Kg m}^2 \text{ seg}^{-2} = 10^7 \text{ dinas cm} = 10^7 \text{ ergios}$$

Esta unidad corresponde más a la realidad: un hombre de 80 Kg que corre a 3 m/seg tiene una energía cinética de ½ mv^2 = ½ 80 9 Kg m^2/seg^2 = 360 Julios. Otra unidad usual en la técnica es el *Kilovatio-hora*

$$1 \text{ Kwh} = 103 \text{ W x } 3.600 \text{ seg} = 3{,}6\ 10^6 \text{ W seg} = 3{,}6\ 10^{13} \text{ ergios}$$

Por ejemplo, para llenar un tanque de agua de 10 m^3 a 10 m de altura, el motor de la bomba debe realizar un trabajo de $W = \Delta V = mg\,\Delta z$ = 10.000 Kg x 9,8 m/seg^2 x 10 m = 0,27 Kwh. Para escalar el Aconcagua (7.000 m) desde el campamento de Plaza de Mulas (4.500 m) un hombre de 80 Kg debe realizar un trabajo de W = 80 Kg x 9,8 m/seg^2 x 2.500 m = 0,55 Kwh.

Finalmente, una tercera unidad usual es el "Kilográmetro":

$$1 \text{ kilográmetro} = 1 \text{ kilogramos/fuerza x } 1 \text{ m} = 9{,}8 \text{ Newton x } 1 \text{ m} = 9{,}8 \text{ Julios}$$

Una unidad de energía muy utilizada en el dominio atómico es el "electrón-voltio". Corresponde al aumento de energía cinética de una partícula con la carga eléctrica elemental (carga del electrón), cuando es acelerada por una diferencia de potencial eléctrico de 1 Voltio. Esta unidad es igual a 1,60 x 10^{-12} ergios. En física nuclear se usa un múltiplo, el "Mega-electrón-voltio": 1 Mev = 106 ev = 1,60 x 10^{-6} ergios.

En la técnica, muchas veces no interesa la energía, sino la variación de energía en el tiempo. Por ejemplo, todos nosotros seríamos capaces de llevar 10 toneladas de carbón al 10° piso de un edificio. Pero tardaríamos una eternidad, porque nuestro cuerpo sólo nos suministra energía "de a puchitos". Una grúa, en cambio, lo podría hacer en pocos segundos.

En resumen, en la técnica interesa, además de la energía, la cantidad

$$P=\frac{dW}{dt} \qquad (4.22)$$

Este cociente diferencial se denomina *potencia* instantánea. Puede ser positiva (potencia "entregada") o negativa (potencia "absorbida").

Por ejemplo, lo que interesa en un motor de un automóvil no es la energía total que es capaz de entregar (que es prácticamente ilimitada; depende de su duración), sino la "rapidez" con que puede entregar cierto trabajo, o sea, su potencia. Lo que se paga al adquirir un motor es la potencia que puede entregar. Lo que se paga durante su funcionamiento es la energía que entrega (combustible).

Para el caso de un cuerpo que se desplaza bajo la acción de una fuerza **f** tenemos $dW = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. Por lo tanto:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{f} \bullet \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{f} \bullet \mathbf{v} \qquad (4.23)$$

La unidad de potencia en el sistema cgs es el ergio/seg. En el sistema MKS, se llama *Vatio*:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ Kg m}^2 \text{ seg}^{-3} = 10^7 \text{ ergios/seg}$$

Por esta razón, el Julio se denomina también vatio-segundo.

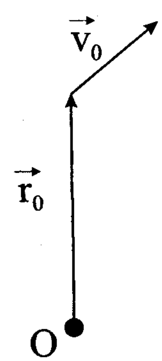
Otra unidad en la técnica es el "caballo-fuerza" (unidad absurda, todavía usada en algunas industrias):

$$1 \text{ HP} = 75 \text{ Kilográmetros/seg} = 735 \text{ W} = 0{,}735 \text{ KW}$$

En el ejemplo anterior del tanque de agua, un motor de 1 HP tardaría $t = W/P = 0{,}27\text{Kwh}/0{,}735\text{Kw} = 0{,}38\text{h} = 23$ minutos, para llenar el tanque. En el caso del Aconcagua, el tiempo de escalamiento desde el campamento base suele ser de unas 15 horas (descontando descansos); la potencia media sería entonces de $\overline{P} = 0{,}55\text{Kwh}/15\text{h} \cong 37 \text{ W} \cong 1/20 \text{ HP}$.

h) Aplicaciones del principio de la conservación de la energía mecánica

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este principio de conservación. En primer lugar, consideremos un caso de movimiento de una masa bajo la acción de una sola fuerza conservativa, sin intervención de reacciones de vínculo. Tomaremos para ello, nuevamente, el movimiento de un satélite en el campo gravitatorio terrestre. Por el teorema de conservación de la energía, en todo momento



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma Mm}{r_0}$$

(hemos considerado $C = V(\infty) = 0$, página 136).

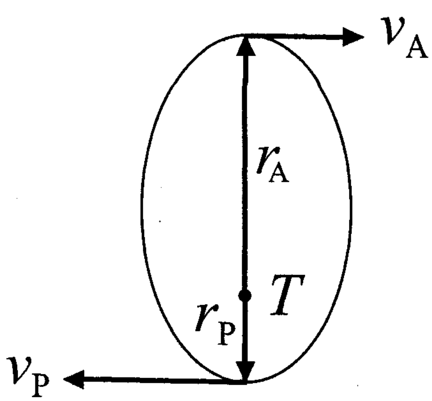
O sea:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Esta expresión ya la teníamos al considerar el caso particular $\mathbf{v}_0 // \mathbf{r}_0$ (Cap. 3 f). Pero ahora aparece como relación absolutamente general, válida para *cualquier* condición inicial, independiente de la dirección de $\mathbf{v}_0$. Estudiemos el radicando $v_0^2 - 2\gamma M/r_0 + 2\gamma M/r$. Pueden suceder dos casos:

a) $v_0^2 < 2\gamma M/r_0$. Obsérvese que de acuerdo con la (3.16) $2\gamma M/r_0 = v_e^2$, donde v_e es la velocidad de escape vertical desde el punto inicial. Este caso se caracteriza entonces por $v_0 < v_e$. Por lo tanto es necesario que $2\gamma M/r \geq v_e^2 - v_0^2$ para que el radicando sea positivo (y sea posible el movimiento). O sea, en todo momento debe cumplirse $r \leq 2\gamma M/(v_e^2 - v_0^2)$. En otras palabras, r es acotada: el cuerpo será realmente "satélite" (no se alejará indefinidamente). Esta condición se llama de "movimiento ligado" (corresponde a órbitas elípticas y circulares). La condición $v_0^2 < 2\gamma M/r_0$ es equivalente a $1/2 m v_0^2 - \gamma Mm/r_0 = E < 0$. Esto se puede expresar diciendo que la condición para obtener un movimiento ligado en el campo gravitatorio es que la energía total sea negativa (siempre que se haya tomado $C = V(\infty) = 0$). Esto quiere decir que en el estado inicial la energía potencial (negativa) debe "ganarle" (en módulo) a la energía cinética.

b) $v_0^2 > 2\gamma M/r_0$, o sea $v_0 > v_e$; tendremos $E > 0$. La raíz en la expresión de v es real para cualquier valor de r, incluso para $r = \infty$. El movimiento no está acotado: el cuerpo se escapa (corresponde a órbitas hiperbólicas). De esto deducimos que la velocidad (3.16) representa la velocidad de escape para *cualquier* dirección inicial.



Consideremos un satélite en órbita elíptica y examinemos el balance de energía cinética y potencial a lo largo de su recorrido. Partiendo del apogeo, el punto más lejano, el valor de la energía total queda fijado por la condición inicial: $E = 1/2 m v_A^2 - \gamma Mm/r_A$. Ya sabemos que $E < 0$, para que la órbita sea realmente una elipse. En otras palabras, la velocidad inicial (que en este caso es perpendicular al radio vector) debe cumplir $v_A \leq \sqrt{2\gamma M/r_A}$. A medida que el satélite se aleja del apogeo, se va acercando paulatinamente al centro de la Tierra: su energía potencial disminuye (aumenta en valor negativo). Como la energía mecánica total debe permanecer constante, esa disminución de energía potencial se convierte en un aumento de energía cinética. Ésta es máxima en el perigeo (y, con ello, es máxima la velocidad del satélite). Desde allí el satélite vuelve a

alejarse de la Tierra, y parte de su energía cinética vuelve a convertirse en energía potencial. Por lo tanto, en el movimiento ligado de un satélite hay un juego periódico de conversión de energía cinética en potencial y viceversa. Sólo en el caso de una órbita circular, ambas formas de energía permanecen constantes por separado. Si ahora el satélite hubiese salido con una velocidad igual a la velocidad de escape (3.16), seguiría una trayectoria parabólica, en la que, una vez llegado al infinito,[18] se habrá convertido toda su energía cinética inicial en energía potencial gravitatoria. Si, por último, la velocidad inicial es mayor que la de escape, la trayectoria es hiperbólica, llegando el satélite al infinito con energía cinética remanente $v_\infty > 0$.

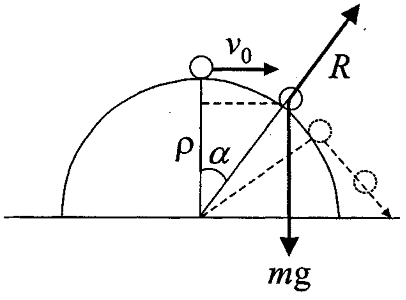
Es interesante combinar el caso de un satélite en órbita elíptica con el teorema de conservación del impulso angular. Si el satélite sale inicialmente del apogeo, como en el caso discutido arriba, el módulo de su impulso angular valdrá $L = m\, v_A\, r_A$. Por lo tanto, en el perigeo tendremos $v_P\, r_P = v_A\, r_A$. Combinando esta relación de velocidades con la que se obtiene al aplicar el teorema de conservación de la energía mecánica, obtenemos el valor de la velocidad inicial en el apogeo en función de la distancia mínima r_P:

$$v_0 = v_A = \sqrt{2\gamma M \frac{r_P}{(r_P + r_A) r_A}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_A} \frac{2}{1 + r_A / r_P}}$$

Obsérvese que para $r_P = r_A$ (órbita circular) volvemos a la (4.15). Para $r_P = \infty$ (órbita parabólica), obtenemos la (3.16). La expresión de arriba permite determinar, en el caso real de un satélite puesto en órbita en las vecindades de la Tierra, el límite mínimo para la velocidad de inyección (supuesta horizontal, como ocurre en la mayoría de los casos), para que el satélite no entre en la zona "densa" de la atmósfera, en su perigeo. Efectivamente, si la altura de inyección es de 300 Km s.n.m., y si, por ejemplo, exigimos que el perigeo esté por encima de los 200 Km, la velocidad inicial no deberá ser menor que el valor dado por

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_A}} \sqrt{\frac{2}{1 + r_A / r_{\min}}} = v_{\text{circular}} \sqrt{\frac{2}{1 + 6680/6580}} = 0{,}996\, v_{\text{circular}}$$

O sea, no deberá diferir en más de un 4 por mil de la velocidad para una órbita circular.



El próximo ejemplo a tratar es el de un cuerpo bajo la acción combinada de una fuerza conservativa y de reacciones de vínculo. Ya hemos dicho que éstas, por no realizar trabajo durante el movimiento de un cuerpo, no "molestan" en el teorema de conservación de la energía mecánica. Consideremos un cuerpo puntual que se desliza sin frotamiento sobre

18. En la práctica se diría: "tan lejos de la Tierra, que el campo gravitatorio de ésta sea despreciable frente al campo del Sol y de los planetas".

una superficie esférica, partiendo de la posición más alta con una velocidad inicial v_0. Las fuerzas actuantes serán: el peso $m\mathbf{g}$ y la reacción de vínculo **R**. Se desea saber en qué punto el móvil deja de estar en contacto con la esfera. Para ello consideremos la ecuación de movimiento en la dirección normal a la trayectoria:

$$-R + mg\cos\alpha = ma_c = m\frac{v^2}{\rho}$$

O sea:
$$R = mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{\rho}$$

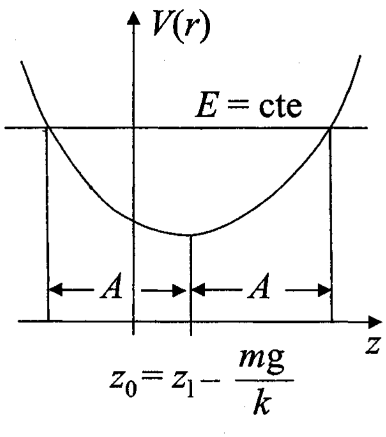
La condición para que el móvil deje de estar en contacto con la esfera estará dada por $mv^2/\rho \geq mg\cos\alpha$, o sea $v^2 \geq \rho\, g\cos\alpha$. El valor de v lo obtenemos del teorema de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\,\rho$$

Despejando el valor de v y reemplazándolo en la condición para la velocidad, obtenemos el valor límite de $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha_{\lim} = \frac{v_0^2}{3g\rho} + \frac{2}{3} \qquad \text{o sea} \qquad \alpha_{\lim} = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3g\rho} + \frac{2}{3}\right)$$

Para $v_0 = 0$, cos $\alpha_{\lim} = 2/3$. Para $v_0 > \sqrt{g\rho}$, el valor de cos $\alpha_{\lim}$ sería mayor que 1; ello querrá decir físicamente que desde un principio no hay contacto con la esfera: la masa "sale volando" en trayectoria parabólica, menos curvada que la esfera. Obsérvese que este tipo de problema se podría haber resuelto para cualquier tipo de superficie: en el cálculo de la velocidad v por el teorema de conservación de la energía no interviene la forma de la trayectoria, sino sólo el punto inicial y el final (su altura relativa).



El último ejemplo será el de una masa sujeta a dos fuerzas conservativas provenientes de dos campos de fuerzas diferentes. Para ello, analizaremos el ejemplo tratado en el capítulo 3 h, de una masa suspendida de un resorte. En ese caso, esa masa tiene dos tipos de interacciones conservativas con la Tierra: la gravitatoria, a la que corresponde una energía potencial $V_g = mgz + C'$, y la elástica, con una energía potencial $V_e = ½\, k\,(z - z_1)^2 + C$, en la que z_1 es la posición del extremo del elástico libre. La energía potencial total será la suma $V(z) = mgz + ½\, k\,(z - z_1)^2 + C$. Obsérvese que la constante es $C = V(z_1) - mgz_1$.

En el movimiento oscilatorio armónico (3.20) que ejecutará la masa, tiene lugar un juego periódico de conversión de energía cinética en

potencial y viceversa. En este caso, la energía potencial se reparte en energía potencial gravitatoria y elástica. En particular, en los dos puntos de elongación máxima, en los que la energía cinética es nula, la energía potencial es máxima y del mismo valor. Sin embargo, las energías gravitatoria y elástica, por separado, difieren entre sí para esos dos puntos; en el punto inferior, parte de la energía potencial gravitatoria correspondiente a la posición superior se ha convertido en energía potencial elástica. Es útil discutir este ejemplo en base al gráfico de la energía potencial en función de la altura z. La representación está dada en la figura, y corresponde a una parábola. Es el caso típico de un pozo de potencial. El valor mínimo corresponde a la posición de equilibrio, la cual, derivando la expresión de $V(z)$, efectivamente coincide con la expresión dada en el capítulo 3 h. Para un dado valor de E se obtienen gráficamente los puntos de elongación máxima, buscando la intersección de la recta horizontal E = cte. con la parábola.

i) El principio de conservación de la energía para fuerzas no conservativas

Hasta aquí hemos considerado un cuerpo cuyo movimiento estaba completamente determinado por fuerzas conservativas y reacciones de vínculo. En ese caso, toda variación de la energía cinética de ese cuerpo ocurría a expensas de su energía potencial y viceversa. La energía total era constante. Consideremos ahora el caso de un cuerpo sujeto a fuerzas conservativas y a fuerzas no conservativas.

Sea **K** la resultante de las fuerzas conservativas, **F** la resultante de fuerzas no conservativas y **R** la de las reacciones de vínculo. La fuerza total es, entonces, $\mathbf{f} = \mathbf{K} + \mathbf{F} + \mathbf{R}$ y su trabajo, a lo largo de la trayectoria del móvil, entre P_0 y P es

$$W = \int_{P_0}^{P} \mathbf{K} \cdot ds + \int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{P_0}^{P} \mathbf{R} \cdot ds = \int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot ds - (V - V_0) = W' - (V - V_0)$$

pues $\int_{P_0}^{P} \mathbf{R} \cdot ds = 0$ y $\int_{P_0}^{P} \mathbf{K} \cdot ds = -(V - V_0)$, donde V es el potencial de las fuerzas conservativas. La integral $W' = \int_{P_0}^{P} \mathbf{F} \cdot ds$ depende del camino y representa el trabajo de las fuerzas no conservativas.

De acuerdo con la (4.17), tendremos

$$W = W' - (V - V_0) = T - T_0$$

O sea:

$$W' = (T + V) - (T_0 + V_0) = \Delta E \qquad (4.24)$$

Por lo tanto, la variación de la energía mecánica total de un cuerpo está dada por el trabajo de las fuerzas no conservativas. En otras palabras, cuando aparecen interacciones no conservativas (en las que el trabajo entre dos posiciones depende del camino seguido por el móvil), la energía mecánica *no es más* una constante de movimiento. Sin embargo, aquí aparece un *principio*, que no se puede deducir sino que requiere comprobación experimental, según el cual en los casos en que la energía mecánica de un cuerpo varía, lo hace a expensas de la variación de otras formas de energía, como la energía química, térmica, electromagnética, etc. Éste es el principio general de la conservación de la energía.

Consideremos finalmente la expresión relativista (4.9) $m = m_0 / \sqrt{1-(v/c)^2}$. Calculemos el aumento de masa Δm de un móvil cuya velocidad pasa de un valor v_1 a otro v_2, ambos mucho menores que la velocidad de la luz (caso clásico):

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} - \frac{m_0}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\right)$$

Como supusimos $v/c << 1$, podemos aproximar por serie de Taylor:

$1/\sqrt{1-(v/c)^2} \cong 1 + 1/2(v/c)^2$. Por lo tanto,

$$\Delta m \cong \frac{1}{2}\frac{m_0\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{c^2} = \frac{T_2 - T_1}{c^2} = \frac{\Delta T}{c^2}$$

O sea, para la variación de energía cinética de un cuerpo vale:

$$\Delta T = \Delta m\ c^2 \qquad (4.25)$$

Como c^2 es un número enorme, Δm es extremadamente pequeño. La expresión (4.25) se puede escribir en la forma

$$\Delta T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} \qquad (4.25a)$$

El término

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} = mc^2 \qquad (4.26)$$

se denomina *energía relativista total* de la masa m. La fórmula (4.26) es la clásica "ecuación de Einstein". Según esta definición, una masa en reposo tiene una energía total

$$E_0 = m_0\, c^2 \qquad (4.26a)$$

Esta energía de denomina "energía en reposo" (*rest energy*).

La energía cinética relativista de un móvil se define en la forma

$$T = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} - m_0 c^2 \qquad (4.25b)$$

Esto sale de (4.25a), para $v_2 = v$ y $v_1 = 0$. Si $v/c << 1$, obtenemos, aproximando como antes, el valor clásico $T = ½\, mv^2$.

Para el caso de cuerpos que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz, lo que interviene en el principio de conservación de la energía en lugar de la energía cinética es la energía total mc^2. Una partícula puede incluso desaparecer totalmente, con tal de que su energía en reposo m_0c^2 aparezca en otra forma de energía (energía cinética de los productos de desintegración, radiación electromagnética, etc.). Obsérvese que la energía en reposo de una masa es enorme. Por ejemplo, haciendo desaparecer 1 Kg de materia, se libera una energía de

$$E_0 = m_0c^2 = 1 \text{ Kg } (3.10^8 \text{ m/seg})^2 = 9\ 10^{16} \text{ Joule}$$

Las transformaciones de energía en reposo (masa) en energía cinética y viceversa juegan un papel fundamental en la física nuclear.

Veamos unos ejemplos para el principio general de conservación de la energía. Consideremos en primer lugar el caso de un satélite artificial que es puesto en órbita desde la superficie de la Tierra. Esto quiere decir que su energía mecánica pasa de un valor $E_0 = V_0$ en la superficie terrestre a un valor $E = V(r) + T > E_0$. Esto exige, de acuerdo con la (4.24), el trabajo positivo de fuerzas no conservativas. En este caso, ese trabajo es provisto por la fuerza de retropropulsión del cohete portador. Este aumento de energía mecánica provendrá, de acuerdo con el principio general de conservación de energía, de una forma "no mecánica" de energía (la energía química de combustión del propulsante). Una vez en órbita, la energía mecánica permanece constante. Si consideramos la fuerza de rozamiento con el gas tenue que existe a esas alturas, la energía mecánica disminuirá gradualmente, debido al carácter disipativo de la interacción por frotamiento. En particular, al dar una vuelta (suponemos el satélite en órbita prácticamente circular), el radio de la órbita variará, por efecto de la acción de la fuerza disipativa **f** de acuerdo a la relación (4.24) y teniendo en cuenta la (4.15):

$$W' = -|f|2\pi\, r = \delta\, E = \delta\left(\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\gamma\, Mm}{r}\right) = -\frac{1}{2}m\frac{\gamma\, M}{r^2}\delta\, r + \frac{\gamma\, Mm}{r^2}\delta\, r = \frac{1}{2}m\frac{\gamma\, Mm}{r^2}\delta\, r$$

Esto quiere decir que el radio disminuirá gradualmente: el satélite está "cayendo" lentamente hacia la Tierra. El período de revolución también disminuirá; la variación relativa por cada revolución valdrá, teniendo en cuenta la (4.16):

$$\frac{\delta\, \tau}{\tau} = \frac{3}{2}\frac{\delta\, r}{r} = -\frac{6\pi\, r^2}{\gamma\, Mm}|f|$$

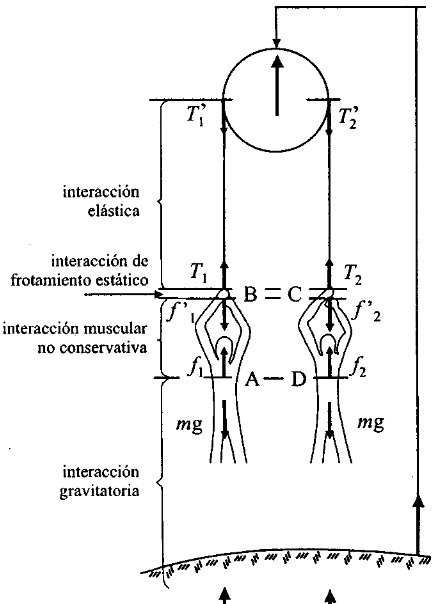
Esto se comprueba para todos los satélites artificiales en órbitas circulares. Para satélites en órbitas excéntricas (elipses), la fuerza disipativa de rozamiento actúa con efecto apreciable sólo en las vecindades del perigeo. Obsérvese que en este ejemplo no se conserva el impulso angular del satélite: ello se debe a que éste transfiere impulso angular a la masa de gas que lo frena, a través de la interacción de rozamiento.

Otro ejemplo es el del ascensor que sube con velocidad constante. En ese caso, hay una interacción conservativa (la gravitatoria) y una interacción no conservativa (la dada por el sistema cable-motor), que están en equilibrio mutuo (velocidad de ascenso constante). En este caso, la energía cinética se mantiene constante y el trabajo de la fuerza no conservativa se transforma en energía potencial del ascensor. La potencia que debe entregar el motor (el mecanismo de interacción no conservativo) estará dada directamente por la (4.23), en la que **f** sería la tensión del cable. Cuando el ascensor vuelve a bajar, a velocidad constante, la energía potencial acumulada se disipa en forma de calor en la campana del freno correspondiente.

Es sumamente instructivo discutir aquí un problema clásico, excelente para fijar ideas en forma definitiva sobre dinámica, por un lado, y sobre el teorema de conservación de la energía, por otro. Se trata del caso de dos individuos de masas exactamente iguales, colgados de sendos cabos de una cuerda (de masa despreciable e inextensible), que pasa por una roldana (de masa despreciable y sin frotamiento) fija al techo. Inicialmente están en reposo (equilibrio). Ahora comienzan a trepar; el de la izquierda es forzudo y trepa más rápido que el de la derecha. ¿Cuál de los dos llegará primero a la polea? La solución dinámica de este problema suele presentarse así: independientemente de la "fuerza" que haga cada uno por separado, sobre cada individuo actúan como únicas fuerzas el peso (igual para los dos) y la tensión de la cuerda (también igual para los dos). Durante cada esfuerzo en la trepada, la tensión de la cuerda es mayor que el peso; por lo tanto, ambos tendrán en todo momento la misma aceleración hacia arriba: $a = (T - mg)/m$, llegando, por lo tanto, simultáneamente a la polea. Esto vale incluso si uno de ellos no ha hecho ningún esfuerzo. Si bien esto es absolutamente correcto, esta solución aturde frecuentemente, por la tendencia a mezclar las nociones intuitivas de fuerza, "esfuerzo muscular", "cansancio muscular" y trabajo. Planteemos este problema detalladamente, desde el punto de vista de los procesos de interacción en juego. Éstos están descriptos en la figura.

Obsérvese en la figura que, por pertenecer a un mismo proceso de interacción (3.3), los siguientes pares de fuerza siempre serán iguales en módulo (y opuestos en sentido): $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f'}_1$ (interacción muscular de 1); $\mathbf{f'}_1$ y $\mathbf{T}_1$ (interacción de frotamiento estático entre las manos de 1 y la cuerda); $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T'}_1$ (interacción elástica en la cuerda a la izquierda); $\mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f'}_2$ (interacción muscular de 2); $\mathbf{f'}_2$ y $\mathbf{T}_2$ (interacción de frotamiento de 2); $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T'}_2$ (interacción elástica en la cuerda a la derecha). Por otra parte, deben ser iguales $\mathbf{T'}_1$ y $\mathbf{T'}_2$ (no hay rozamiento en la polea, y su masa [en realidad, su momento de inercia, Cap. 5] es despreciable). Por lo tanto, necesariamente, la fuerza $\mathbf{f}_1$ de la interacción muscular del individuo 1 debe ser igual a la fuerza de interacción muscular de 2. Aquí está el aparente contrasentido: ¿acaso el esfuerzo muscular no está controlado por cada individuo independientemente?

Veamos primero el siguiente caso: el individuo 1 *suelta* la soga en B. Esto quiere decir que anula la interacción de frotamiento estático. Con ello se anulan, por lo dicho más arriba, las fuerzas $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T'}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T'}_2$. Si el hombre 2 persiste con su interacción muscular, esto sólo podrá durar un instante muy breve, pues, en esa interacción, sus manos (de masa



muy pequeña) serían aceleradas rápidamente hacia él. En resumen, la interacción muscular de 2 también se anula (¡aunque no lo quiera éste!); los *dos* hombres caerán simultáneamente.

El próximo caso a tratar es el siguiente: el individuo 1 contrae los brazos aumentando su esfuerzo muscular (trepa). Dado que antes la fuerza muscular $\mathbf{f}_1$ estaba en equilibrio con el peso *mg*, ahora será mayor, dando una resultante distinta de cero, que acelera al individuo hacia arriba (3.5). Si δf es el aumento de f_1, la aceleración será $\alpha_1 = (f_1 + \delta f - mg)/m = \delta f \,/\, m$. Por otra parte, como la distancia AB ha disminuido, la interacción muscular habrá realizado trabajo positivo. Por lo dicho arriba, todas las fuerzas $T_1, \ldots, T_2$ aumentarán su módulo en δf. Esto quiere decir que el individuo 2 *debe* aumentar su interacción muscular precisamente en el valor δf para *mantener* la configuración de sus brazos y el frotamiento estático en C (para no resbalar). En otras palabras, debe reaccionar al "tirón" que siente en la mano. Pero en ese aumento de fuerza muscular *no* varía la distancia CD (por ejemplo, el individuo 2 podría estar colgando con los brazos completamente extendidos); por lo tanto, la interacción muscular de 2 *no realiza trabajo* en ese aumento (¡no hay que confundir cansancio muscular con trabajo mecánico realizado!). En resumen: para no resbalar en el punto C, el individuo 2 debe aumentar, sin realización de trabajo alguno, su interacción muscular precisamente en un monto δf; ello implica que sobre él actúa ahora una resultante no nula, dándole una aceleración $a_2 = \delta f / m = a_1$. En este caso, el aumento de energía mecánica del sistema (aumento de energía potencial de la interacción gravitatoria de 1 y 2, aumento de su energía cinética) es provisto por el trabajo de la interacción muscular (¡no conservativa!) de 1.

Si ahora también el individuo 2 "hace fuerza" por su parte, para trepar, su interacción muscular aumentará independientemente, en un monto $\delta f'$. En esta interacción se realiza trabajo, por cuanto la distancia CD disminuye. Para este aumento independiente $\delta f'$ valen las mismas consideraciones que antes: es ahora el individuo 1 el que, para no resbalar por efectos del "tirón" adicional en B, debe aumentar (sin trabajo adicional) su esfuerzo muscular en $\delta f'$. Ambos tendrán entonces una aceleración adicional $a'_2 = \delta f' / m = a'_1$. Obsérvese que esta aceleración podría ser opuesta a la anterior, si el individuo 2 *descendiera* de la soga, en lugar de ascender. En ese caso, él está disminuyendo su interacción muscular, aumentando la distancia CD y realizando un trabajo negativo (pese a ello, ¡se cansa igual!). Si las aceleraciones son exactamente opuestas, ambos individuos permanecen a la misma altura, el de la izquierda trepando continuamente "hacia arriba", el de la derecha "descendiendo". La energía mecánica total es constante; hay una transferencia continua de energía entregada por la interacción muscular no conservativa de 1 a la interacción correspondiente en 2, que recibe ese trabajo (aunque el individuo 2 no lo "sienta" fisiológicamente). Una discusión análoga vale para el caso en que el individuo 2 mantiene su esfuerzo muscular constante e igual al inicial, a cambio de resbalar en el punto C.

En ese caso, ambos quedarán a la misma altura, y la energía entregada por la interacción muscular de 1 se convierte en energía térmica por efectos del frotamiento dinámico en el punto C.

Ambos individuos, sin excepción, siempre se encontrarán a una misma altura, cualquiera sea ésta, porque siempre tendrán la misma aceleración, cualesquiera hayan sido los "esfuerzos" individuales realizados. El esfuerzo de cada uno se puede dividir siempre en dos partes: una contribución "voluntaria" para trepar, o sea, para disminuir la distancia AB o CD, en la que se realiza trabajo; la otra parte corresponde a una contribución "involuntaria", que debe ser ejercida para mantener la configuración de brazos y el frotamiento estático en B y C respectivamente. Para esto no se realiza trabajo.

Si bien ambos individuos llegarán siempre simultáneamente a la polea, independientemente de quien haya realizado más trabajo, el tiempo que tardarán para ello dependerá de la suma de sus esfuerzos (mayor potencia). Asimismo, es fácil ver que la soga se desplazará siempre hacia el lado del individuo que realiza más trabajo (¡la única forma para descubrir quién de los dos hace "mula" al trepar, o sea, quién realiza el trabajo menor, consiste en mirar para dónde gira la polea ("mulímetro"), ya que los dos *siempre* ascenderán simultáneamente!)

Por último, volvamos al ejemplo dado en la página 130 con los dos astronautas que se encuentran en el espacio y se acercan mutuamente tirando de una cuerda. Analicemos este caso desde el punto de vista del balance de energía. Será un caso de interacción de dos cuerpos con masas comparables entre sí; el principio de conservación de la energía deberá, pues, plantearse para la energía cinética (y potencial) *total* del sistema. El mecanismo de interacción en este caso (acción muscular) es no conservativo: cuando los dos astronautas se acercan, realizan un trabajo positivo, que incrementará correspondientemente la energía total del sistema. Como no hay fuerzas conservativas en juego, el incremento de energía mecánica corresponderá a un aumento de energía cinética exclusivamente. Efectivamente, habíamos visto que la velocidad de los astronautas aumenta considerablemente a medida que éstos se acercaban entre sí. En otras palabras, cuando los dos "salen volando" después del abrazo, como en el ejemplo discutido en la página 130, la ganancia neta de energía cinética habrá sido provista por el trabajo de las fuerzas musculares que los dos astronautas han debido realizar mientras se estaban acercando.

Como ejemplo de aplicación de las expresiones (4.25) y (4.25b), calculemos el aumento de la masa de un protón, que ha sido acelerado a una energía de 25.000 Mev (página 139) en un sincrotrón. La energía en reposo (4.26a) de un protón es de 939 Mev; por lo tanto, de acuerdo con la (4.25b), su energía total será de 25.939 Mev. Dividiendo la (4.26) por la (4.26a), obtenemos un aumento relativo de masa: $m/m_0 = E/E_0 \cong 2{,}76$. La energía más alta que se ve en los protones de la radiación cósmica es del orden de 10^{19} ev (proyecto internacional Pierre Auger en Malargüe, Mendoza). ¡Con una energía tal, la masa del protón es 10^{10} veces su masa en reposo!

j) Colisiones

Denominaremos colisión o choque entre dos cuerpos puntuales a un proceso de interacción de duración sumamente corta, y que sólo tiene lugar cuando los dos cuerpos se encuentran muy próximos entre sí. El mecanismo de interacción puede ser elástico (choque entre dos vagones de tren), electromagnético (colisión de un electrón con un átomo), nuclear (colisión de un neutrón con un núcleo), etc. Los teoremas de conservación permiten estudiar el proceso de choque en forma totalmente independiente del mecanismo particular de interacción. Efectivamente, permiten vincular el "estado inicial" de los dos cuerpos (sus variables cinemáticas antes de la interacción) con el "estado final" (después de la interacción), en forma independiente de los generalmente muy complicados procesos que ocurren durante la interacción. En otras palabras, nos permiten hacer predicciones sobre el estado final, sin necesidad de conocer detalles particulares del mecanismo de interacción en cuestión.

Estudiemos primero el caso en una sola dimensión, es decir, el de dos masas que se mueven sobre una misma recta. En ese caso el impulso angular total es nulo respecto del sistema centro de masa (página 122). Para el impulso lineal, valdrá la relación (4.1), que aquí escribiremos en la forma:

$$m_1\left(v_1 - v_1^0\right) = -m_2\left(v_2 - v_2^0\right) \qquad (4.27a)$$

Respecto de la energía analizaremos la variación de energía cinética

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^{0\,2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{0\,2}\right) = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - v_1^{0\,2}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^2 - v_2^{0\,2}\right)$$
(4.27b)

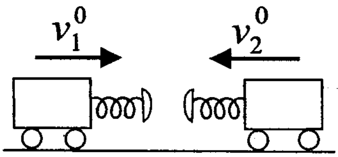
Como suponemos a las partículas libres tanto en el estado inicial como en el estado final, la variación de energía cinética (4.27 b) estará vinculada, de acuerdo con la (4.24), con la variación de energía potencial en el mecanismo de interacción y con el trabajo de eventuales fuerzas no conservativas durante esta interacción, en la forma:

$$\Delta T = W' - \Delta V$$

Por ejemplo, durante el choque, puede quedar comprimido un resorte ($\Delta V > 0$), puede disiparse energía térmica ($W' < 0$), o puede liberarse energía nuclear ($\Delta V < 0$).

De acuerdo con las relaciones (4.1) y (4.27), que forman un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas v_1 y v_2, éstas estarán totalmente determinadas, si se conoce la variación de energía cinética ΔT, o sea, el trabajo de las fuerzas no conservativas W', y la variación de energía potencial ΔV correspondiente a las interacciones conservativas. Esto sólo será posible si se conoce exactamente el mecanismo de interacción. Sin embargo, hay casos particulares en los que, sin necesidad de conocer en todo detalle el mecanismo, es posible predecir un valor para ΔT. Ello ocurre en el caso de un choque "perfectamente *elástico*", en el que $\Delta T = 0$, y en el caso de un choque "perfectamente *plástico*", en el que ΔT tiene el valor negativo más alto posible (en valor absoluto), o sea, en el que hay una pérdida máxima de

energía cinética. En la práctica es posible, en muchos casos, predecir cuándo una colisión va a ser elástica o plástica con sólo conocer el mecanismo de interacción cualitativamente. Por ejemplo, dos carritos que chocan entre sí, con resortes perfectos, lo harán en forma perfectamente elástica ($W' = 0$ y $\Delta V = 0$, pues los elásticos devolverán toda la energía potencial acumulada durante la compresión inicial). Si, en cambio, cada carrito tiene un mecanismo que engancha el resorte una vez comprimido, el choque será perfectamente plástico, pues toda la energía cinética disponible (que *no* es la energía cinética total, ver página 153) se ha transformado en energía potencial de los resortes.



Analizaremos más detenidamente la expresión (4.27b). Para ello, la transformaremos de una manera conveniente, haciendo uso de la relación (4.27a). Demostraremos la igualdad

$$\Delta T = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[(v_2 - v_1)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 \right] \qquad (4.27c)$$

Efectivamente, para el corchete tenemos

$$(v_2 - v_1)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 = \left[(v_2 + v_2^0) - (v_1 + v_1^0)\right]\left[(v_2 - v_2^0) - (v_1 - v_1^0)\right] =$$
$$= (v_2 - v_2^0)(v_2 + v_2^0) - (v_2 - v_2^0)(v_1 + v_1^0) - (v_2 + v_2^0)(v_1 - v_1^0) + (v_1 - v_1^0)(v_1 + v_1^0)$$

Teniendo ahora en cuenta la (4.27a), podemos transformar el segundo y el tercer término, quedando:

$$(v_2 - v_1)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 = (v_2 - v_2^0)(v_2 + v_2^0) + \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1^0)(v_1 + v_1^0) +$$
$$+ \frac{m_2}{m_1}(v_2 + v_2^0)(v_2 - v_2^0) + (v_1 - v_1^0)(v_1 + v_1^0)$$

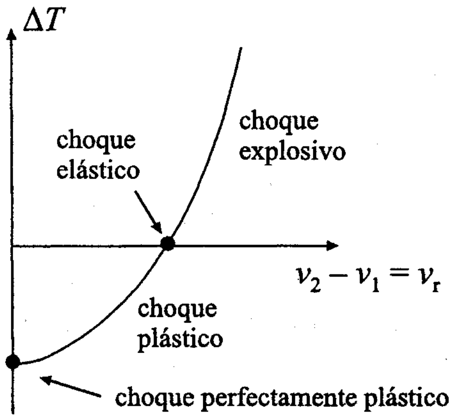
Factoreando y multiplicando por el factor $1/2\, m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, obtenemos efectivamente la (4.27b).

Observando la relación (4.27c), de acuerdo con la (2.14), reconocemos en $v_2 - v_1$ y $v_2^0 - v_1^0$ las velocidades *relativas* de la masa 2 respecto de la masa 1 para el estado final y el inicial, respectivamente:

$$v_r = v_2 - v_1 \quad \text{y} \quad v_r^0 = v_2^0 - v_1^0$$

La variación de energía cinética es entonces proporcional a la diferencia entre los cuadrados de las velocidades relativas final e inicial de los dos cuerpos.

Es útil analizar la representación gráfica de la función $\Delta T = \Delta T(v_2 - v_1)$. Corresponde a una parábola. El punto de intersección con el eje de las abscisas corresponde al caso de



un choque perfectamente elástico; la intersección con el eje de las ordenadas representa el mínimo absoluto de ΔT, o sea, el caso de un choque perfectamente plástico. La zona intermedia para valores negativos de ΔT corresponde a los choques "parcialmente" plásticos; la rama superior, para valores ΔT positivos, representa los choques "explosivos" (en los que el proceso de interacción entrega energía al sistema).

Analizaremos ahora con un poco más de detención los choques *elásticos*. De acuerdo con la relación (4.27c), la condición para las velocidades finales es

$$(v_2 - v_1)^2 = (v_2^0 - v_1^0)^2, \text{ o sea, } (v_2 - v_1) = \pm(v_2^0 - v_1^0)$$

El doble signo requiere un análisis especial. Recordemos que $(v_2^0 - v_1^0)$ y $(v_2 - v_1)$ representan las velocidades relativas de la masa 2 respecto de la 1, antes y después del choque. Ahora bien, es fácil ver que esas dos velocidades relativas siempre deben tener signo opuesto, pues, de lo contrario, el cuerpo 2 habría "atravesado" al cuerpo 1. Suponiendo que esto no es posible desde el punto de vista físico, tendremos en definitiva:

$$(v_2 - v_1) = -(v_2^0 - v_1^0)$$

Si a esta ecuación agregamos la (4.27a), obtenemos un sistema lineal, cuyas soluciones son:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^0 + 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2^0$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^0 + 2\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^0$$

En el caso particular en que la masa 2 está en reposo, obtenemos:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^0$$

$$v_2 = 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1^0$$

Obsérvese que si $m_2 > m_1$, el móvil 1 invierte su marcha después del choque. En particular, si $m_2 >> m_1$, obtenemos $v_1 = -v_1^0$, y $v_2 = 0$. El móvil 1 se "reflejó" sobre la masa "infinita" 2, la cual continúa en reposo. Este caso corresponde al choque elástico de una pelota contra una pared. Si, en cambio, $m_1 >> m_2$, tenemos $v_1 = v_1^0$ y $v_2 = 2v_1^0$. El cuerpo 2 sale "disparando" con velocidad doble a la del cuerpo incidente de masa "infinita", mientras que éste prosigue prácticamente con la misma velocidad inicial. Obsérvese que

este último caso es idéntico al primero, si se lo describe desde un sistema de coordenadas que viaja con la masa 2. Corresponde al de una pelota en reposo pateada elásticamente o al de una molécula del aire cuando es "pateada" por un objeto que vuela a gran velocidad. Por último, si $m_1 = m_2$, obtenemos $v_1 = 0$ y $v_2 = v_1^0$. Los dos cuerpos "intercambian" sus movimientos: el cuerpo incidente se detiene, y el que estaba en reposo sale con velocidad igual a la incidente. Esto puede comprobarse fácilmente con el choque de dos monedas iguales, una de las cuales está inicialmente en reposo. En física nuclear esto tiene importancia para frenar neutrones: cuando un neutrón choca elásticamente con un protón (núcleo del átomo de hidrógeno), el neutrón se detiene y le transfiere toda su energía cinética al protón (en choque central, a $L \equiv 0$).

La cantidad

$$\frac{1/2 m_2 v_2^2}{1/2 m_1 v_1^{0\,2}} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 4 \frac{m_1/m_2}{(1 + m_1/m_2)^2}$$

representa la transferencia relativa de energía cinética del cuerpo incidente al cuerpo 2. Como se ve, sólo depende de la *relación* entre las masas. Esta transferencia es máxima para el caso $m_1 = m_2$ (por ello, se usa materia hidrogenada, como parafina, para frenar neutrones).

Veamos ahora el caso de un choque perfectamente plástico. Según el gráfico de la función $\Delta T = \Delta T(v_2 - v_1)$, éste ocurrirá cuando $v_2 - v_1 = 0$, o sea, cuando los dos cuerpos se mueven con la misma velocidad en el estado final. El valor de ésta se obtiene de la (4.27a):

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0}{m_1 + m_2}$$

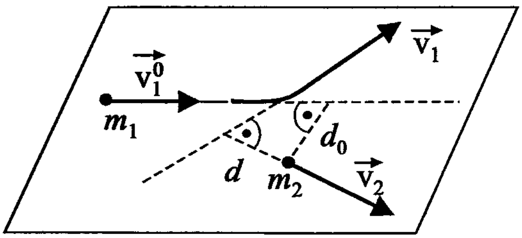
Obsérvese que se trata de la velocidad del centro de masa (4.4), lo que es lógico, por cuanto los dos cuerpos están en reposo mutuo en el estado final. Un choque perfectamente plástico ocurre, por ejemplo, cuando un proyectil se incrusta en el cuerpo contra el que choca, o cuando un protón o un neutrón quedan atrapados en el núcleo en el que hicieron blanco. En esos casos, la variación de energía cinética

$$\Delta T_{\text{pl}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_2^0 - v_1^0\right)^2$$

se transforma en otra forma de energía (disipativa, en el caso del proyectil; potencial nuclear, en el caso del protón atrapado). Obsérvese que es imposible convertir *más* energía cinética que la expresada arriba; ello se debe al hecho de que siempre debe quedar energía cinética disponible para el estado final, en el que las dos masas, si bien en reposo mutuo, se están moviendo con una velocidad impuesta por el principio de conservación del impulso lineal. Solamente en el sistema centro de masa, la conversión de energía cinética en un choque perfectamente plástico es total (puesto que en ese sistema no hace

falta "reservar" energía cinética para el estado final, ya que después del choque ambas masas estarán en reposo).

Hasta aquí hemos tratado el caso de colisiones en una sola dimensión (choques centrales). Discutamos brevemente el caso de colisiones en el espacio, en el caso particular de que uno de los dos cuerpos está inicialmente en reposo: $v_2^0 = 0$. En el estado inicial, la masa 1 se aproxima sobre una recta, con un impulso lineal y con un impulso angular fijado por el parámetro de impacto *d* (página 125). Cuando la masa 1 pasa suficientemente cerca de la 2, entra en acción el mecanismo de interacción (cuerda en el caso de los astronautas (página 130), fuerzas electromagnéticas en el caso de un electrón que pasa por un átomo, etc.). Una vez cesado el proceso de interacción, las dos masas salen con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente. Por la conservación de la dirección del vector impulso angular, estas dos velocidades deben estar sobre el mismo plano que el incidente. Trazando un sistema de coordenadas en ese plano, podemos escribir la conservación del impulso lineal en la siguiente forma, según las componentes:



$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}^0$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}^0$$

Para el impulso angular, tomaremos como centro de momentos la posición inicial de la masa 2. En ese caso, la conservación del módulo del impulso angular se escribirá:

$$d\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = d_0\sqrt{v_{1x}^{0\,2} + v_{1y}^{0\,2}}$$

d es el "parámetro de impacto" (ver dibujo). Si añadimos la expresión para la variación ΔT de la energía cinética del sistema ($\Delta T = 0$ para choques elásticos), obtenemos cuatro ecuaciones en las cinco incógnitas v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y} y *d*, en función de los datos m_1, m_2, v_{1x}^0, v_{1y}^0, d_0.

Para determinar totalmente el problema, es necesario integrar las ecuaciones de movimiento, en base al campo de fuerzas particular que representa la interacción, y obtener la trayectoria exacta de los cuerpos *durante* su interacción. Obsérvese que, sólo para choques en una dimensión, el problema está totalmente resuelto con la sola aplicación de los teoremas de conservación.

Fijemos ahora "por decreto" el valor de una de las variables cinemáticas, por ejemplo, el ángulo de desviación con que emerge la partícula incidente después de la interacción (ángulo de *scattering* o dispersión). Fijado un valor particular para ese ángulo de desviación, el problema queda totalmente determinado por los principios de conservación: tenemos cuatro ecuaciones algebraicas para las cuatro incógnitas restantes. Podemos ilustrar esta situación con el siguiente ejemplo: consideremos una partícula que choca con otra inicialmente en reposo, en una colisión no-central, y supongamos que *no* conocemos

el mecanismo de interacción. En ese caso, no podremos predecir el ángulo con que emergerá la partícula incidente. Pero, una vez determinado ese ángulo experimentalmente, los principios de conservación nos permiten predecir *todas las demás* variables cinemáticas intervinientes. Con este ejemplo, es fácil comprender la importancia del estudio experimental de las distribuciones angulares en colisiones atómicas y nucleares, para la determinación de los procesos de interacción intervinientes.

Veamos finalmente una observación importante:

Durante un choque, actúa sobre un cuerpo una fuerza extremadamente grande durante un intervalo de tiempo extremadamente pequeño. Sin embargo, la integral

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(t')dt' \qquad \text{donde } |f| \to \infty \ \text{ y } \ t - t_0 \to 0 \qquad (4.28)$$

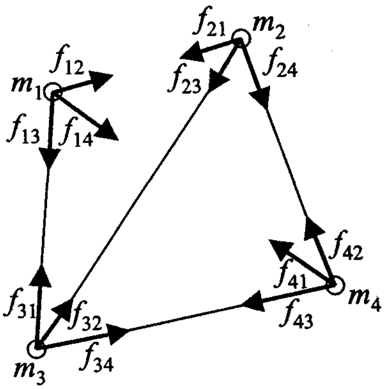
tiene un valor finito bien definido, por cuanto, de acuerdo con la (4.5a), $\mathbf{J} = \Delta\mathbf{P}$, variación del impulso lineal. El vector **J** se suele denominar "percusión" (o impulsión); es igual a la variación del impulso lineal del cuerpo puntual.

Dinámica del cuerpo rígido

a) Dinámica de los sistemas de puntos

Hasta aquí hemos estudiado exhaustivamente la interacción de dos cuerpos puntuales. Nos corresponde analizar ahora lo que sucede cuando tenemos más de dos cuerpos puntuales en interacción mutua (por ejemplo, unidos con elásticos, cargados eléctricamente o en atracción gravitacional mutua).

Supondremos, para lo que sigue, que la interacción mutua entre dos cuerpos cualesquiera de un sistema de n cuerpos es independiente de los demás cuerpos del sistema (independiente de su masa, su posición, su velocidad, etc.). En otras palabras, supondremos que la interacción entre dos de los cuerpos no puede ser influida por la presencia de las interacciones con los otros cuerpos. Éste es un *principio*, válido para el caso de las interacciones discutidas en este texto. La experiencia muestra que en ese caso basta sumar, para cada cuerpo, los efectos parciales de interacción con cada uno de los demás componentes del sistema (experiencia de Mach "generalizada").



Supongamos el sistema de cuatro masas de la figura. Sobre la masa m_1 actuará una fuerza total

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{14} = m_1\mathbf{a}_1$$

donde $\mathbf{f}_{12}$ es la fuerza de interacción parcial con la masa m_2, $\mathbf{f}_{13}$ con la masa m_3 y $\mathbf{f}_{14}$ con la masa m_4. Por otra parte, sobre el cuerpo 2 actúa una fuerza parcial:

$$\mathbf{f}_{12} = -\,\mathbf{f}_{21}$$

("principio" de acción y reacción), que representa su interacción sobre el cuerpo 1; lo mismo se extiende a los demás cuerpos. Escribamos en forma sistemática las fuerzas que actúan en este sistema de cuerpos puntuales:

Sobre m_1:	$\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{14}$
Sobre m_2:	$\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{f}_{24}$
Sobre m_3:	$\mathbf{F}_3 = m_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{f}_{34}$
Sobre m_4:	$\mathbf{F}_4 = m_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{f}_{41} + \mathbf{f}_{42} + \mathbf{f}_{43}$

Sumando vectorialmente y agrupando convenientemente las fuerzas parciales, resulta

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + m_4\mathbf{a}_4 =$$
$$= (\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21}) + (\mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{31}) + (\mathbf{f}_{14} + \mathbf{f}_{41}) + (\mathbf{f}_{23} + \mathbf{f}_{32}) + (\mathbf{f}_{24} + \mathbf{f}_{42}) + (\mathbf{f}_{34} + \mathbf{f}_{43}) = 0$$

por ser nulo cada uno de los paréntesis.

Con n cuerpos tendríamos

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_i m_i\mathbf{a}_i = 0 \qquad (5.1)$$

Ésta es la forma generalizada de la (3.2). Esta expresión se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{P}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

O sea, el impulso lineal total del sistema es constante, cualquiera sea la interacción entre las masas:

$$\sum m_i\mathbf{v}_i = \sum \mathbf{P}_i = \mathbf{P} = \text{cte.} = \sum m_i\mathbf{v}_i^0 \qquad (5.2)$$

El impulso lineal también es una constante de movimiento para un sistema de n cuerpos en interacción.

Como además cada una de las fuerzas $\mathbf{f}_{ik}$ está sobre la recta que une la masa i con la masa k, tendremos, tomando momentos respecto de un punto fijo cualquiera y recordando la (4.10):

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21} = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}_3 \times \mathbf{f}_{34} + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{f}_{43} = 0 \quad \text{etc.}$$

Entonces

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i = 0$$

Ésta es la forma generalizada de la (4.10). Recordando la definición de impulso angular,

$$\frac{d}{dt}\sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i = 0 \qquad (5.3)$$

por ser $\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i = 0$. O sea:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \text{cte.} = \sum \mathbf{r}_i^0 \times m_i\mathbf{v}_i^0$$

El impulso angular es constante, cualquiera sea la interacción entre las dos masas. Por último, en la expresión del impulso lineal (5.2) podemos escribir:

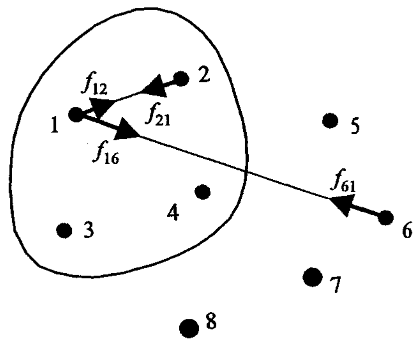
$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \mathbf{r}_i = \text{cte.}$$

O sea, si $m = \sum m_i$ es la masa total del sistema, entonces

$$\frac{\mathbf{P}}{m} = \frac{d}{dt}\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_C = \mathbf{V}_C = \text{cte.} \qquad (5.4)$$

El vector

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \qquad (5.5)$$



ubica la posición del centro de masa del sistema, punto notable determinado unívocamente por la posición de las masas, y cuya velocidad es, entonces, constante, cualquiera sea la interacción entre las masas. La (5.5) es la generalización de la expresión (4.3) del centro de masa de dos cuerpos puntuales.

Contemplemos ahora un sistema de puntos materiales en interacción que es parte de uno más amplio; por ejemplo, el formado por los cuerpos 1, 2, 3 y 4 de la figura. La suma de las fuerzas sobre ese sistema *parcial* es:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + m_4\mathbf{a}_4 = \\
&= (\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{14} + \mathbf{f}_{15} + \mathbf{f}_{16} + \ldots) + (\mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{f}_{24} + \mathbf{f}_{25} + \mathbf{f}_{26} + \ldots) + \\
&\quad + (\mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{f}_{34} + \mathbf{f}_{35} + \mathbf{f}_{36} + \ldots) + (\mathbf{f}_{41} + \mathbf{f}_{42} + \mathbf{f}_{43} + \mathbf{f}_{45} + \mathbf{f}_{46} + \ldots) = \\
&= [\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21}] + [\mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{31}] + [\mathbf{f}_{14} + \mathbf{f}_{41}] + [\mathbf{f}_{23} + \mathbf{f}_{32}] + [\mathbf{f}_{24} + \mathbf{f}_{42}] + [\mathbf{f}_{34} + \mathbf{f}_{43}] + \\
&\quad + (\mathbf{f}_{15} + \mathbf{f}_{16} + \ldots) + (\mathbf{f}_{25} + \mathbf{f}_{26} + \ldots) + (\mathbf{f}_{35} + \mathbf{f}_{36} + \ldots) + (\mathbf{f}_{45} + \mathbf{f}_{46} + \ldots) = \\
&= (\mathbf{f}_{15} + \mathbf{f}_{16} + \ldots) + (\mathbf{f}_{25} + \mathbf{f}_{26} + \ldots) + (\mathbf{f}_{35} + \mathbf{f}_{36} + \ldots) + (\mathbf{f}_{45} + \mathbf{f}_{46} + \ldots) = \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Los pares de fuerzas entre los corchetes se anulan mutuamente por el "principio" de acción y reacción. Esas fuerzas se denominan *fuerzas interiores* del sistema parcial. Las fuerzas de interacción con los cuerpos 5, 6, ..., que no pertenecen al sistema parcial considerado, se llaman *fuerzas exteriores*. **R** es la resultante de las fuerzas exteriores.

Por lo tanto,

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{4} m_i \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (5.6)$$

En esta expresión, $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ es el impulso total del sistema *parcial* de los cuerpos 1, 2, 3 y 4. La expresión de arriba nos dice que la resultante de las fuerzas exteriores sobre un sistema determina la derivada del impulso lineal total del sistema respecto del tiempo. Las fuerzas interiores no participan en la variación del impulso total. En general, para modificar el impulso lineal de un sistema de n cuerpos es necesario que actúen fuerzas exteriores. Un sistema libre de fuerzas exteriores tiene impulso total constante. Por otra parte, teniendo en cuenta la (5.4), tenemos,

$$\mathbf{R} = m\frac{d\mathbf{V}_C}{dt} \qquad (5.7)$$

O sea, para modificar el movimiento del centro de masa de un sistema de n cuerpos, es necesario que actúen fuerzas exteriores.

Obsérvese bien: la aceleración y la variación del impulso de cada una de las masas aisladas m_1, m_2, m_3, ... están determinadas por la acción conjunta de las fuerzas exteriores *y* las interiores que actúan sobre cada una. En cambio, la variación del impulso total (y de la velocidad del centro de masa) está determinada por las fuerzas exteriores exclusivamente.

Haciendo el mismo razonamiento para el momento de las fuerzas sobre el sistema en consideración, llegamos a la conclusión siguiente:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21}] + [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{13} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{f}_{31}] + \ldots + \\ &+ [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{15} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{16} \ldots] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{25} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{26} \ldots] + \ldots = \\ &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{15} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{16} \ldots] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{25} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{26} \ldots] + \ldots = \mathbf{M}\end{aligned}$$

donde **M** es el momento resultante de las fuerzas exteriores (momento *exterior*). Por lo tanto, de acuerdo con la (5.3):

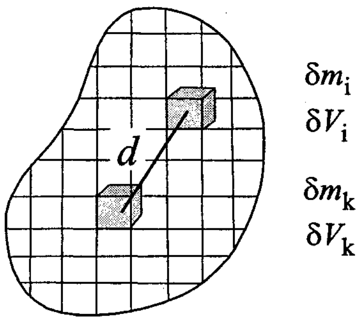
$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (5.8)$$

O sea, la variación del impulso angular total de un sistema de n cuerpos está dada por el momento de las fuerzas exteriores. Las fuerzas interiores participan en la variación del impulso angular de cada una de las masas individuales, pero no en la variación del impulso angular total.

Obsérvese finalmente que toda fuerza exterior sobre un sistema es fuerza interior de un sistema más amplio, del cual el primero forma parte.

b) Cinemática del cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un cuerpo cuyos puntos mantienen distancias invariables entre sí, por grandes que sean las fuerzas que sobre el cuerpo actúan. Esto representa la *condición de rigidez*. Un cuerpo así sólo existe en condiciones ideales, aunque en muchos casos es posible aproximar el comportamiento de un cuerpo sólido al de un cuerpo idealmente rígido. Dividiendo el cuerpo rígido en celditas de volumen infinitesimal δV_i, podemos considerar al mismo como un sistema de masas puntuales (las de las celditas) rígidamente unidas entre sí, y aplicar, por lo tanto, las relaciones dinámicas (5.6), (5.7) y (5.8).

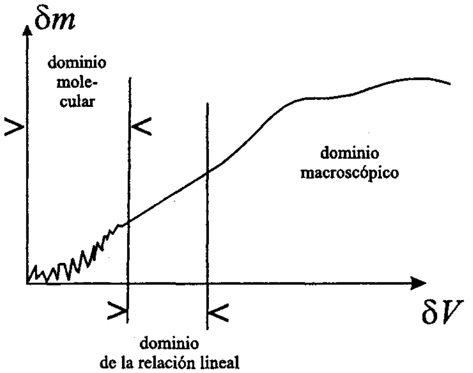


Sea δm_i la masa de una de las celdas δV_i. Si el volumen es suficientemente pequeño, pero no demasiado pequeño (para no entrar en el dominio molecular), esa masa será proporcional al mismo. La constante de proporcionalidad

$$\rho = \lim \frac{\delta m}{\delta V} \qquad \text{para } \delta V \text{ suficientemente pequeño}$$

se denomina *densidad* del cuerpo en el entorno en cuestión.

Aquí conviene hacer una observación importante. Una cantidad como δV no es estrictamente un diferencial en el sentido matemático (que puede ser arbitrariamente pequeño por hipótesis). Obsérvese que, por un lado, δV debe ser suficientemente pequeño, para que valga la relación lineal $\delta m = \rho \delta V$ dentro del error experimental; por otro lado, no debe ser demasiado pequeño, para no entrar en el dominio molecular, en el cual vuelve a destruirse la relación lineal entre δm y δV (puesto que, para un δV del orden del dominio molecular, el valor correspondiente de δm puede variar bruscamente según se incluya o se excluya una determinada molécula). Todo esto está ilustrado en la figura adjunta. Para la resolución de problemas concretos fuera del dominio molecular, se asocia a δV un diferencial matemático dV, y se procede *como si* la relación lineal $dm = \rho\, dV$ fuese válida en el límite $\delta V \to 0$ sin restricciones (o sea, como si la materia fuese "continua"). Una cantidad como δV, muy pequeña, pero no demasiado pequeña, se podría denominar un "diferencial físico". No lo haremos, por miedo al furor de los matemáticos.



Por último, nótese que la densidad es un cociente diferencial, pero no es derivada (pues no existe ninguna función "$m = m(V)$").

La masa total de un cuerpo estará entonces dada por

$$m = \lim_{\delta V_i \to 0} \sum \delta m_i = \lim_{\substack{\delta V_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \delta V_i = \int \rho \, dV$$

Ésta es una integral de volumen. Lo importante en la definición de esta integral es que el valor del límite no depende de la forma particular en que se ha hecho la subdivisión en celditas.

El centro de masa de un cuerpo estará definido por

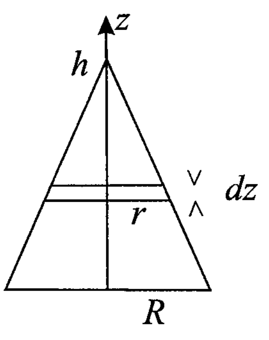
$$\mathbf{r}_c = \frac{\lim \sum \delta m_i \mathbf{r}_i}{m} = \frac{\lim_{\delta V \to 0} \sum \rho_i \mathbf{r}_i \delta V_i}{m} = \frac{\int \rho \, \mathbf{r} \, dV}{m} \qquad (5.9)$$

La integral de volumen $\int \rho \, \mathbf{r} \, dV$ es un vector cuyas componentes son

$$\int \rho \, x dV \quad , \quad \int \rho \, y dV \quad , \quad \int \rho \, z dV$$

El centro de masa de cuerpos homogéneos (en los que ρ = cte.) coincide con el centro de figura (punto geométrico en el que se cortan las rectas o planos de simetría). Si el cuerpo no es homogéneo (ρ depende de x, y, z), puede estar en cualquier parte.

Como ejemplo veamos el cálculo del centro de masa de un cono macizo circular, homogéneo. Situamos el sistema de coordenadas como en la figura. El centro de masa debe estar sobre el eje de simetría (eje z). Para hallar su posición, basta hallar



$$z_c = \frac{\int \rho \, z dV}{\int \rho \, dV}$$

Considerando que ρ = cte., podemos dividir el cuerpo en elementos de volumen definidos por los cilindros de altura dz y radio r. Observando los triángulos semejantes, tenemos:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-z}{h} \qquad \text{o sea} \qquad r = \frac{R}{h}(h-z)$$

Entonces,

$$dV = \pi \, r^2 dz = \pi \, \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2 dz$$

y

$$m = \int \rho \, dV = \rho \, \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 dz = \rho \, \frac{\pi R^2 h}{3}$$

(hemos convertido la integral de volumen en una integral simple; $\pi R^2 h/3$ es el volumen del cono). Por otra parte,

$$\int \rho\, z\, dV = \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h (h - z)^2 z\, dz = \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{h^4}{12} = \rho \frac{\pi R^2 h^2}{12}$$

Obtenemos finalmente

$$z_C = \frac{h}{4}$$

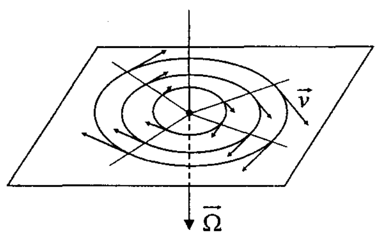
En el caso general de un cuerpo no simétrico o un cuerpo simétrico no homogéneo, no se puede reducir la integral de volumen a una integral simple. En esos casos, la integral de volumen es una integral triple. Muchos textos traen tablas para la posición del centro de masa en los cuerpos geométricos más comunes.

Para el cuerpo rígido existen las siguientes posibilidades de movimiento:

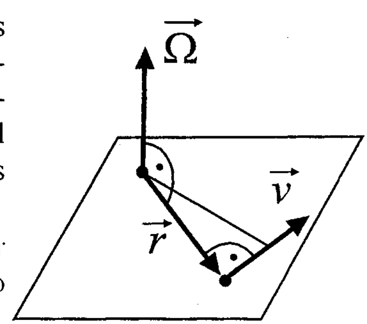
1. *Traslación pura*: todo punto del cuerpo tiene el mismo vector velocidad.

2. *Rotación pura*: el cuerpo rota alrededor de un eje dado (dos puntos diferentes ya no tienen más en general la misma velocidad).

3. *Movimiento roto-traslatorio*: superposición de una rotación y una traslación, o sea, una rotación alrededor de un eje cuyos puntos a su vez se desplazan todos con la misma velocidad.



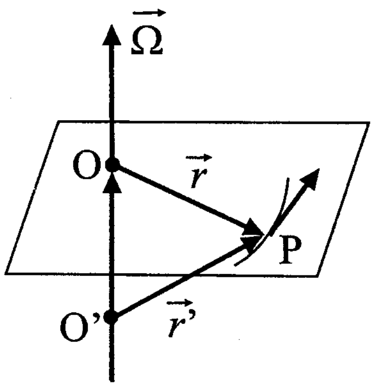
Consideremos, en primer lugar, el movimiento de rotación alrededor de una eje fijo. En ese caso, cada punto del cuerpo tiene una velocidad que depende de la posición relativa respecto del eje. Estamos en presencia de un *campo de velocidades*: a cada punto del cuerpo le corresponde un vector velocidad determinado. Considerando un plano perpendicular al eje del movimiento, ese campo de velocidades tiene el aspecto de la figura. Los puntos se mueven en circunferencias concéntricas con el eje. La condición de rigidez (distancia invariable entre dos puntos cualesquiera) exige que todos los puntos roten el mismo ángulo en el intervalo de tiempo δt. Eso quiere decir que todos los puntos tendrán la misma velocidad angular alrededor del eje.



Es fácil comprobar, basado en la definición del vector velocidad angular, que la velocidad de un punto del cuerpo estará dada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \qquad (5.10)$$

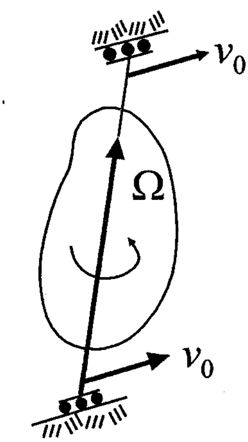
donde **r** es el vector posición del punto en cuestión desde un punto dado del eje. El vector velocidad angular Ω es el mismo para todos los puntos.



En particular, los puntos del eje tienen **v** = 0. Por otra parte, obsérvese que el vector **r** puede ser el vector posición respecto de cualquier punto O' del eje de rotación. Efectivamente, siendo **r'** = **O'O** + **r**, tenemos $\Omega \times \mathbf{r}' = \Omega \times \mathbf{O'O} + \Omega \times \mathbf{r} = \Omega \times \mathbf{r} = \mathbf{v}$, ya que $\Omega \times \mathbf{O'O} = 0$, por ser vectores paralelos (ver transformación (2.12)). La expresión (5.10) muestra que el campo de velocidades de un cuerpo rígido en rotación pura está íntegramente determinado por el vector velocidad de rotación.

Si a ese movimiento de rotación le superponemos ahora un movimiento de traslación caracterizado por la velocidad $\mathbf{v}_0$ (la misma para todos los puntos), como en el caso de la figura, la velocidad de cada punto del cuerpo rígido será, de acuerdo con la superposición de movimientos independientes (2.14):

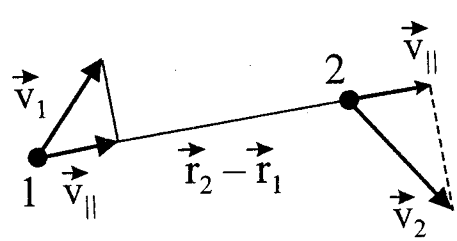
$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 \qquad (5.11)$$



Ésta es la expresión del campo de velocidades para un movimiento rototraslatorio. Obsérvese que la velocidad de traslación $\mathbf{v}_0$ es la velocidad de los puntos del eje de rotación.

La (5.11) es la forma más general del movimiento de un cuerpo rígido; toda otra forma del campo de velocidades violaría la condición de rigidez. Vamos a demostrar esta última aseveración. Sean dos puntos de un cuerpo rígido en movimiento rototraslatorio. La diferencia entre sus vectores velocidad será, de acuerdo a la (5.11), $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Omega \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, tenemos:

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = [\Omega \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$$

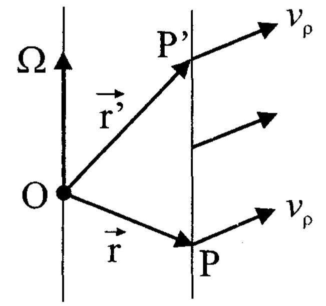


El doble producto mixto es nulo porque dos de sus multiplicandos son iguales (el vector producto $\Omega \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ es perpendicular a $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, siendo por tanto nulo su producto escalar con ese vector $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$). Analicemos el significado de la expresión $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$. Ello querrá decir que $\mathbf{v}_2 \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{v}_1 \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, o sea que la proyección $v_{\parallel}$ del vector $\mathbf{v}_1$ sobre la recta que une los dos puntos es igual (en módulo y sentido) a la proyección de $\mathbf{v}_2$. Pero eso justamente significa que el punto 1 y el punto 2 no se alejan ni se acercan mutuamente, sino que mantienen su distancia invariable

(condición de rigidez). Es fácil comprender entonces que cualquier término vectorial aditivo en (5.11), que sea función de punto, haría violar la condición de rigidez.

Obsérvese que este estado más general de movimiento de un cuerpo rígido está definido por dos vectores característicos $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{\Omega}$, conocidos los cuales, el movimiento queda íntegramente determinado. Por lo tanto, si conocemos $\mathbf{v}_0$ (velocidad del eje) y $\mathbf{\Omega}$ (velocidad angular) en función del tiempo, tendremos determinada la velocidad de cada punto en función del tiempo a través de la (5.11) y, por lo tanto, conoceremos la posición del cuerpo rígido para cada instante. Obsérvese la notable limitación que introduce la condición de rigidez: si bien el cuerpo rígido es un sistema de "infinitos" puntos materiales, el movimiento de ese sistema está enteramente determinado por sólo seis funciones del tiempo: las tres componentes de $\mathbf{v}_0$ y las tres componentes de $\mathbf{\Omega}$.

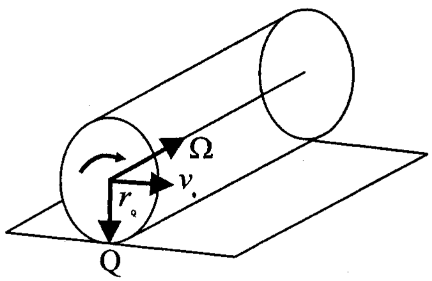
Volviendo a la relación (5.11), es fácil ver que todos los puntos que están sobre una recta paralela al eje de rotación (paralela a $\mathbf{\Omega}$) tienen la misma velocidad. Efectivamente, si P y P' son dos puntos sobre una recta paralela a $\mathbf{\Omega}$, tenemos



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

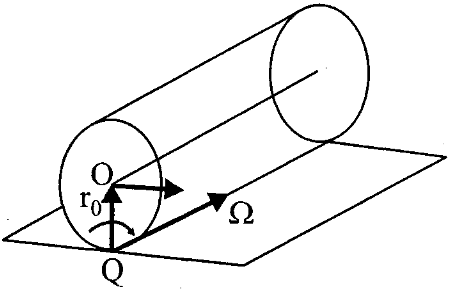
y $\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{PP}') = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_P$,

por ser $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{PP}' = 0$.



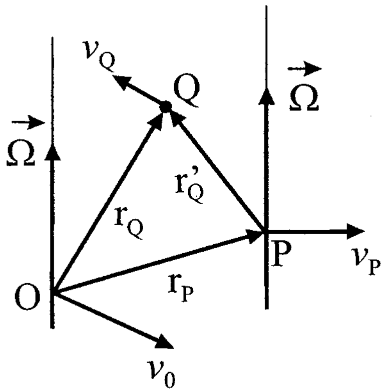
Consideremos ahora un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano. Ese movimiento lo podemos considerar como un movimiento de rotación alrededor del eje del cilindro, al cual está superpuesto el movimiento de traslación del eje, de velocidad $\mathbf{v}_0$. O sea, todo punto del cilindro tendrá una velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. El vector $\mathbf{\Omega}$ no es arbitrario en este ejemplo: queda fijado por la condición de que los puntos de la generatriz de contacto con el plano tengan velocidad nula (rodamiento sin resbalar): $\mathbf{v}_Q = 0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_Q$. Como $\mathbf{r}_Q \perp \mathbf{\Omega}$, resulta para el módulo de $\mathbf{\Omega}$: $\Omega = v_0/r_Q$.

Notemos ahora que este movimiento también se puede considerar como una rotación instantánea pura alrededor de la generatriz de contacto, con la misma velocidad angular $\mathbf{\Omega}$. Obsérvese que en este caso, en un instante δt posterior, el eje de rotación es *otro* (determinado por la nueva generatriz de contacto). Por eso se dice que se trata de un eje instantáneo. La velocidad de un punto cualquiera es ahora $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'$, donde $\mathbf{r}'$ es la posición respecto de un punto del eje instantáneo de rotación (generatriz de contacto).



El resultado de este ejemplo, en el cual se ha descripto un mismo movimiento en dos formas

diferentes, se puede generalizar. Sea un movimiento rototraslatorio cualquiera, caracterizado por un vector rotación Ω y velocidad $\mathbf{v}_0$ de traslación. Las velocidades de dos puntos P y Q serán:

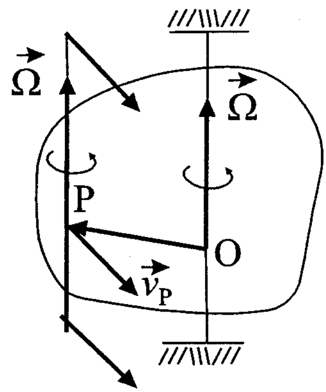


$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \Omega \times \mathbf{r}_P$$
$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \Omega \times \mathbf{r}_Q$$

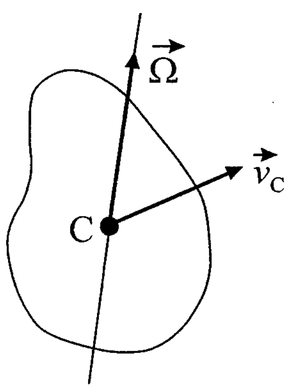
Pero $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}'_Q$, donde $\mathbf{r}'_Q$ es la posición de Q respecto de P. Entonces,

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \Omega \times \mathbf{r}_P + \Omega \times \mathbf{r}'_Q = \mathbf{v}_P + \Omega \times \mathbf{r}'_Q$$

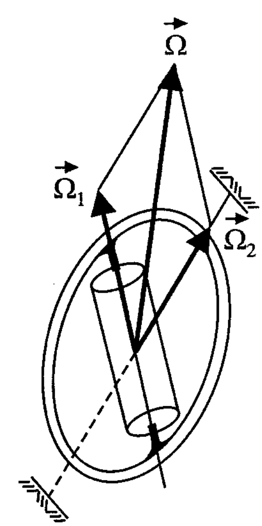
Pero el último miembro representa un movimiento rototraslatorio alrededor de un eje paralelo al anterior, que pasa por el punto P, de la misma velocidad angular Ω y de una velocidad de traslación dada por la velocidad del punto P. En este caso se dice que el movimiento del cuerpo rígido "está referido" al punto P. En resumen, hay una infinidad de posibilidades para describir un movimiento rototraslatorio dado: *cualquier* recta paralela a la dirección de Ω puede ser considerada como eje instantáneo de rotación, con tal de añadir una traslación, dada por la velocidad de los puntos de ese eje instantáneo. En particular, un movimiento rotatorio "puro" puede ser considerado como movimiento rototraslatorio alrededor de un eje instantáneo distinto (pero paralelo) al original.



Como el centro de masa es un punto notable del cuerpo rígido, es muy útil tomarlo como punto de referencia del movimiento de un cuerpo rígido. Por lo tanto, convendrá describir todo movimiento rototraslatorio como una rotación instantánea alrededor de un eje que pase por el centro de masa y una traslación de ese eje. La velocidad de traslación es, entonces, la velocidad del centro de masa. La velocidad de un punto cualquiera es:



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \Omega \times \mathbf{r}_P \qquad (5.11a)$$



Si, finalmente, a un movimiento rotatorio puro le superponemos otro movimiento rotatorio, con un eje que corta al anterior, como el caso de la figura, el movimiento resultante será otro movimiento rotatorio puro, con una velocidad angular

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

y de eje paralelo a Ω, que pasa por el punto de intersección.

Obsérvese con cuidado en la figura que el eje de rotación resultante dado por Ω, así como el de Ω_1 no están fijos en el espacio (ya que ambos rotan con velocidad angular Ω_2 alrededor del eje fijo de Ω_2). En este caso de superposición de rotaciones se pone en evidencia el carácter vectorial de la velocidad angular.

c) Las ecuaciones de movimiento y las variables dinámicas del cuerpo rígido

Ahora se trata de determinar el movimiento de un cuerpo rígido en función del sistema de fuerzas exteriores que actúa sobre él. Volviendo nuevamente a la imagen del cuerpo rígido como un sistema de muchísimos cuerpos puntuales representados por las celdas δV_i, de masa $\delta m_i = \rho_i \delta V_i$, valdrá el sistema de ecuaciones (5.6) y (5.8): (5.12)

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (5.12)$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (5.13)$$

R es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, **M** es el momento de esas fuerzas respecto de un punto fijo O. **P** y **L** son el impulso lineal total e impulso angular total respecto del mismo punto O, respectivamente. En estas ecuaciones intervienen el impulso lineal y el impulso angular del cuerpo rígido. Es necesario encontrar la relación entre estos dos entes y el estado de movimiento del cuerpo rígido.

Esto es sencillo para el impulso lineal. Efectivamente, teniendo en cuenta la (5.4), obtenemos la relación entre el impulso lineal del cuerpo rígido y la velocidad de su centro de masa:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_C \qquad (5.14)$$

A título de ejercicio, se puede llegar a esta relación partiendo de la expresión (5.11a) del movimiento referido al centro de masa. Efectivamente, el impulso total del sistema de masas δm_i será, por definición:

$$\mathbf{P} = \sum \delta m_i \mathbf{v}_i = \sum \rho_i \delta V_i \left(\mathbf{v}_C + \Omega \; \mathbf{x} \; \mathbf{r}_i \right)$$

$\mathbf{r}_i$ es el vector que señala la celda δV_i desde el centro de masa. Pasando al límite $\delta V_i \to 0$ tenemos:

$$\mathbf{P} = \int \rho \left(\mathbf{v}_C + \Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}\right) dV = \mathbf{v}_C \int \rho \, dV + \Omega \,\mathbf{x} \int \rho \, \mathbf{r} \, dV$$

(recuérdese que $\mathbf{v}_C$ y Ω son independientes del punto en cuestión). Pero $\int \rho \, dV = m$, masa total, y teniendo en cuenta la (5.9),

$$\int \rho \, \mathbf{r} \, dV = m \mathbf{r}_C = 0 \qquad (5.15)$$

por estar el centro de masa en el origen, por hipótesis. Llegamos así a la relación (5.14) $\mathbf{P} = m \, \mathbf{v}_C$.

Nos corresponde ahora determinar el impulso angular total $\mathbf{L}$ de un cuerpo rígido en función de su movimiento. Considerando al cuerpo nuevamente dividido en celdas infinitesimales y tomando momentos respecto del centro de masa, tenemos:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \,\mathbf{x}\, \delta m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{r}_i \,\mathbf{x}\, \left[\rho_i \delta V_i \left(\mathbf{v}_C + \Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}_i\right)\right]$$

En el límite $\delta V_i \to 0$ nos queda:

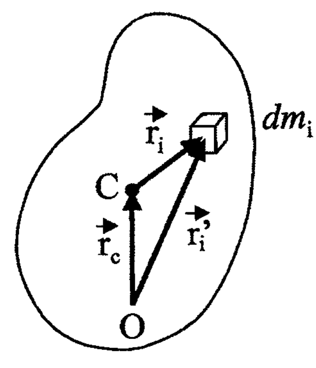
$$\mathbf{L} = [\mathrm{i} \rho \, \mathbf{r} \,\mathbf{x}\, d V] \,\mathbf{x}\, \mathbf{v}_C + \mathrm{i} \, \rho \, \mathbf{r} \,\mathbf{x}\, (\Omega \,\mathbf{x} \mathbf{r}) \, dV$$

Entonces nos queda, teniendo en cuenta (5.15):

$$\mathbf{L} = \int \rho \, \mathbf{r} \,\mathbf{x} (\Omega \,\mathbf{x} \mathbf{r}) dV \qquad (5.16)$$

Esta integral del doble producto vectorial ofrece ciertas dificultades (cálculo tensorial) que no pueden ser vencidas en un curso de física elemental. Lo importante es observar que el vector $\mathbf{L}$ depende unívocamente de la velocidad angular Ω del cuerpo rígido. El impulso angular del cuerpo rígido depende del punto que se elige como centro de momentos. En la expresión (5.16) se había tomado como tal al centro de masa. Si ahora se cambia de punto de referencia, se tendrá, según la figura,

$$\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}' \,\mathbf{x}\, \delta m_i \mathbf{v}_i = \sum \left(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_C\right) \mathbf{x}\, \delta m_i \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{r}_i \,\mathbf{x}\, \delta m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_C \,\mathbf{x} \sum \delta m_i \mathbf{v}_i$$

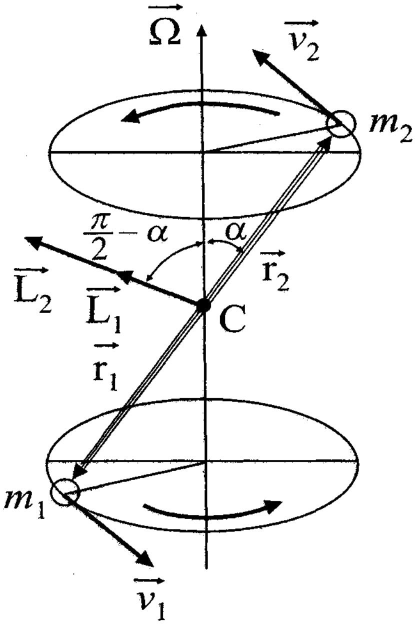


O sea, el impulso angular referido al punto O estará relacionado con el impulso angular respecto del centro de masa en la forma

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{r}_C \mathbf{x} \mathbf{P}$$

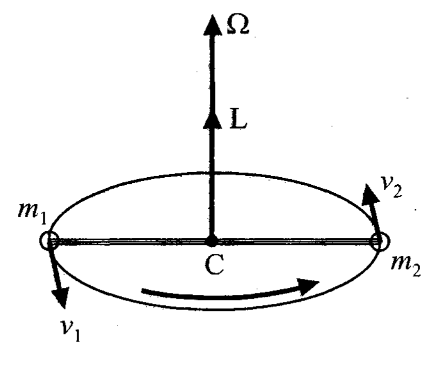
Obsérvese que si el impulso lineal es nulo (centro de masa en reposo), el impulso angular es el mismo respecto de cualquier punto.

El término $\mathbf{r}_C$ x $\mathbf{P}$ se suele denominar impulso angular *orbital* del cuerpo rígido, respecto del punto en cuestión (porque representa el impulso angular que tendría un cuerpo puntual de la misma masa, que sigue la misma trayectoria que el centro de masa del cuerpo). El impulso angular **L** respecto del centro de masa se denomina impulso angular "propio", o *spin* del cuerpo. Esta diferenciación tiene importancia en el caso de un sistema de cuerpos rígidos, no puntuales, en interacción. En ese caso, la constante de movimiento impulso angular total es la *suma* de los impulsos angulares orbitales más los impulsos angulares de *spin*, de cada cuerpo. Esto tiene mucha importancia en física atómica y nuclear, pues se comprueba experimentalmente que muchas de las partículas elementales tienen un impulso angular de *spin* intrínseco. Por otra parte, en el ejemplo del encuentro de los astronautas (páginas 130 y 131), hay que tener en cuenta que en realidad se trata de cuerpos finitos, que pueden tener un momento angular propio apreciable. Por lo tanto, no es rigurosamente válido lo dicho en esas páginas: durante la interacción puede haber transferencia de impulso angular orbital a impulso angular de *spin*, y, con ello, ser invalidada la constancia del plano de movimiento y los demás resultados presentados oportunamente. En particular, los dos astronautas podrían, en un momento dado, aparecer con su centro de masa en reposo, pero girando violentamente alrededor de sí mismos (conversión total del impulso angular orbital en *spin*).

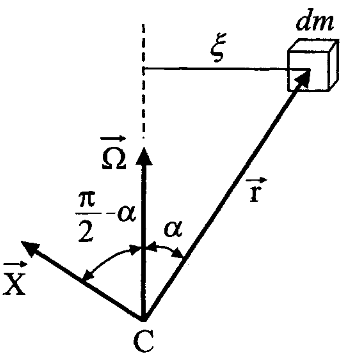


Vamos a mostrar ahora, en un ejemplo sencillo, que **L** tiene en general una dirección diferente de la del vector Ω, o sea, diferente del eje instantáneo de rotación. Para ello consideremos un cuerpo rígido simple, que consta de dos masas puntuales, unidas por una barra rígida de masa despreciable, y que giran alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa. Es fácil ver que el impulso angular de la masa m_1, respecto de C, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1$ está contenido en el plano dado por P_1, P_2 y Ω, siendo perpendicular a la recta que une P_1 con P_2. $\mathbf{L}_2$ tiene la misma dirección y el *mismo* sentido que $\mathbf{L}_1$. El impulso angular total forma, por lo tanto, un ángulo $\pi/2-\alpha$ con el eje de rotación. Solamente si el eje de rotación es perpendicular a la recta que une P_1 con P_2, **L** es paralelo a Ω (y del mismo sentido).

Este resultado vale en forma general para un cuerpo de forma arbitraria (basta considerar los impulsos angulares de los elementitos de volumen δV_i); la dirección del impulso angular no coincide en general con el vector velocidad angular, o sea, con el eje de rotación. Se puede demostrar a partir de la expresión (5.16) que hay sólo *tres* direcciones, perpendiculares entre sí (que coinciden con los ejes de simetría cuando éstos existen), las cuales, tomadas como ejes de rotación, dan impulsos angulares paralelos a Ω. Estas tres direcciones notables se llaman direcciones o *ejes principales de inercia*.



Calcularemos, ahora, la proyección L_Ω del impulso angular sobre el eje $\mathbf{\Omega}$:



$$L_\Omega = \int \rho [\mathbf{r}\,\mathbf{x}(\Omega\,\mathbf{x}\,\mathbf{r})]_\Omega dV$$

Sea un elemento de volumen dV, de masa $dm = \rho\, dV$. El vector que aparece en el integrando tendrá como módulo $|\mathbf{X}| = r|\Omega\,\mathbf{x}\,\mathbf{r}|$, pues el vector producto $\Omega\,\mathbf{x}\,\mathbf{r}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$. Pero $|\Omega\,\mathbf{x}\,\mathbf{r}| = \Omega r \operatorname{sen}\alpha$. Por lo tanto, $X = \Omega r^2 \operatorname{sen}\alpha$. La dirección y el sentido están indicados en la figura. La proyección sobre el eje de Ω será, entonces:

$$[\mathbf{r}\,\mathbf{x}(\Omega\,\mathbf{x}\,\mathbf{r})]_\Omega = X_\Omega = \Omega r^2 \operatorname{sen}\alpha \cos(\pi/2-\alpha) = \Omega r^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \Omega \xi^2$$

donde ξ es la distancia del elemento de volumen al eje de rotación. Por lo tanto,

$$L_\Omega = I\,\Omega \qquad (5.17)$$

donde

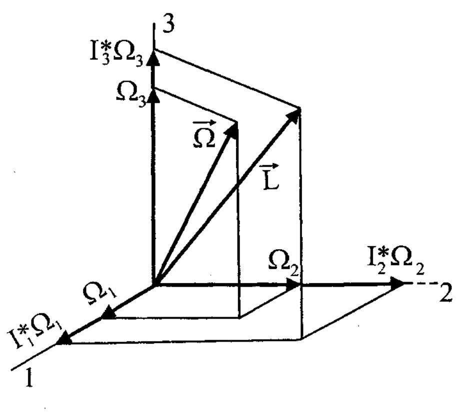
$$I = \int \rho \xi^2 dV \qquad (5.18)$$

es el *momento de inercia* del cuerpo respecto del eje de rotación. La relación (5.17) es de gran utilidad para los casos de movimiento de un cuerpo rígido con un eje fijo; estos casos son los más frecuentes en la técnica.

Obsérvese que el concepto de momento de inercia es aditivo: el momento de inercia respecto de un eje de dos cuerpos unidos rígidamente entre sí es suma de los momentos de inercia de los cuerpos individuales respecto de ese mismo eje.

Si el eje de rotación es un eje principal de inercia y, sólo en ese caso, el vector $\mathbf{L}$ tiene la dirección de $\mathbf{\Omega}$, podremos escribir la relación vectorial

$$\mathbf{L} = I^*\Omega \qquad (5.19)$$



El momento de inercia I^* respecto de un eje principal se llama *momento principal de inercia.* Téngase muy en cuenta que la relación vectorial (5.19) sólo vale para los ejes principales de inercia.

Si Ω no es paralelo a uno de los ejes principales, lo podemos descomponer en tres vectores paralelos a los tres ejes principales, que llamaremos Ω_1, Ω_2, Ω_3. Para cada una de estas rotaciones valdrá una relación vectorial del tipo (5.19), obteniéndose, entonces, para el impulso angular total

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 = I_1^*\Omega_1 + I_2^*\Omega_2 + I_3^*\Omega_3 \qquad (5.19a)$$

I_1^*, I_2^*, I_3^* son los tres momentos principales de inercia. Es evidente que el vector **L** no será más paralelo a Ω, a menos que $I_1^* = I_2^* = I_3^*$. Entre los momentos principales de inercia siempre hay uno máximo y uno mínimo, respecto de cualquier otro eje que pasa por C. El significado físico más importante de la relación (5.19a) es mostrar que la relación entre los vectores **L** y Ω siempre es lineal, aunque los dos vectores tengan direcciones diferentes.[19]

Este nuevo parámetro, el momento de inercia respecto de un eje, aparece también cuando calculamos la energía cinética de un cuerpo rígido. Partiendo de la definición de la energía cinética y dividiendo, como siempre, el cuerpo en celditas:

$$T = \sum 1/2\,\delta m_i v_i^2 = 1/2 \sum \delta m_i \mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_i = 1/2 \sum \delta m_i (\mathbf{v}_C + \Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}_i) \bullet (\mathbf{v}_C + \Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}_i) =$$
$$= 1/2\, v_C^2 \sum \delta m_i + 1/2 \sum \delta m_i |\Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}_i|^2 + \mathbf{v}_C \bullet (\Omega \,\mathbf{x} \sum \delta m_i\, \mathbf{r}_i)$$

Teniendo en cuenta que $\delta m_i = \rho_i \delta V_i$ y pasando al límite, tendremos

$$T = 1/2\, m v_C^2 + 1/2 \int \rho |\Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}_i|^2 dV + \mathbf{v}_C \bullet \left(\Omega \,\mathbf{x} \int \rho\, \mathbf{r}\, dV\right)$$

Pero el último término es cero, por (5.15). Por otra parte, ya hemos visto que $|\Omega \,\mathbf{x}\, \mathbf{r}| = \Omega r \operatorname{sen}\alpha = \Omega \xi$. El segundo término en *T* vale, entonces:

$$1/2 \int \rho \Omega^2 \xi^2 dV = 1/2\, \Omega^2 \int \rho \xi^2 dV$$

En muchos textos hay tablas de momentos de inercia respecto de ejes de simetría, para los cuerpos geométricos más comunes.

19. En otras palabras, tomando un sistema de coordenadas cualquiera, cada una de las tres componentes de **L** será una función lineal de las tres componentes de Ω. Los nueve coeficientes que hacen falta para describir esta proporcionalidad (seis de los cuales son independientes) constituyen en su conjunto las componentes de un solo ente matemático, llamado *tensor de inercia*, y que representa la correspondencia lineal entre **L** y Ω en una forma independiente del sistema de coordenadas. Tomando los ejes principales de inercia como eje de coordenadas, como en la figura (página 170) los nueve coeficientes se reducen a sólo tres diferentes de cero: los momentos principales de inercia. Obsérvese que si bien los valores de los nueve coeficientes dependen del sistema de coordenadas elegido, la correspondencia que ellos establecen entre Ω y **L** es independiente del sistema de coordenadas (dado un Ω, siempre le asignan el *mismo* **L**, cualquiera sea el sistema de coordenadas). Los nueve (seis diferentes) coeficientes de linealidad entre **L** y Ω se pueden calcular a partir de la relación (5.16).

O sea,

$$T = 1/2\, m v_c^2 + 1/2\, I\, \Omega^2 \qquad (5.20)$$

La energía cinética se compone de dos términos: la energía cinética de traslación

$$T = 1/2\, m v_C^2 = 1/2\, \mathbf{P} \bullet \mathbf{v}_C \qquad (5.20a)$$

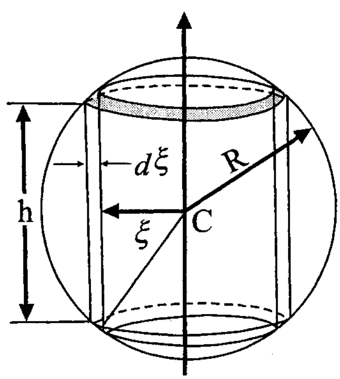
y la energía cinética de rotación

$$T = 1/2\, I\, \Omega^2 = 1/2\, L_\Omega\, \Omega \qquad (5.20b)$$

Obsérvese que, para la rotación, el momento de inercia juega un papel análogo al de la masa en el movimiento de traslación. Es importante notar que I contiene mucho más información que la masa total: depende de la forma en que está distribuida la masa en el cuerpo.

Como ejemplo calcularemos el momento de inercia para un caso particular. Tomemos una esfera homogénea de densidad ρ y calculemos el momento de inercia respecto de un diámetro. Si elegimos como elemento de volumen cilindritos como en la figura, observamos que cada uno de ellos contribuye con un momento de inercia

$$\delta I = \delta m\, \xi^2 = 2\pi \xi\, h\, d\xi\, \rho \xi^2$$



Por lo tanto, el momento de inercia total será

$$I = 2\pi\, \rho \int_0^R h \xi^3 d\xi$$

Pero $h = \sqrt{R^2 - \xi^2}$; entonces

$$I = 4\pi\, \rho \int_0^R \xi^3 \sqrt{R^2 - \xi^2}\, d\xi = 8/15\, \pi\, \rho R^5 = 2/5\, m R^2$$

m es la masa total $4/3\, R^3 \rho$.[20]

Volvamos ahora a las ecuaciones de movimiento (5.12) y (5.13) del cuerpo rígido. Las variables dinámicas impulso lineal e impulso angular que en ellas aparecen están

20. En muchos textos hay tablas de momentos de inercia respecto de ejes de simetría, para los cuerpos geométricos más comunes.

unívocamente ligadas a las variables cinemáticas velocidad del centro de masa y velocidad angular, respectivamente, mediante la (5.14) y la (5.16) o la (5.20b). Por lo tanto, el estado de movimiento determina **P** y **L** del cuerpo rígido y viceversa, los dos impulsos determinan unívocamente el estado de movimiento a través de (5.14), (5.16) y (5.11a).

Por otra parte, las dos ecuaciones[21] de movimiento (5.12) y (5.13) determinan unívocamente los dos vectores **P** y **L** (a través de su integración). En particular, la ecuación (5.12), junto con la (5.14), muestra que el movimiento de traslación de un cuerpo rígido está determinado por la resultante de las fuerzas exteriores. Obsérvese que este movimiento de traslación, dado por el movimiento del centro de masa, es totalmente independiente del punto de aplicación de las fuerzas exteriores. En cambio, la (5.13), junto con la (5.16) o la (5.20b), indica que el movimiento de rotación de un cuerpo rígido está determinado por el momento de las fuerzas exteriores. En resumen, las ecuaciones (5.12) y (5.13) determinan unívocamente el movimiento del cuerpo rígido, pues permiten hallar $\mathbf{v}_C$ y Ω en función del tiempo y, con ello, la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ y la posición de cualquier punto del cuerpo, en función del tiempo.

d) Estática del cuerpo rígido libre y vinculado

Estamos ahora en condiciones de estudiar el equilibrio de un cuerpo rígido, o sea, las condiciones para el sistema de fuerzas exteriores, para que el cuerpo, originalmente en reposo, permanezca indefinidamente en reposo. De acuerdo a (5.14) y (5.16) la condición necesaria y suficiente para reposo permanente es:

$$\mathbf{P} = \text{cte.} = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{L} = \text{cte.} = 0$$

o sea, según las (5.12) y (5.13):

$$\mathbf{R} = 0 \qquad (5.21)$$

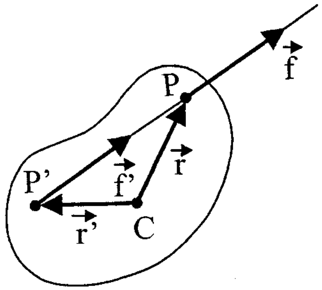
$$\mathbf{M} = 0 \qquad (5.22)$$

Para que un cuerpo rígido libre permanezca en reposo, el sistema de fuerzas actuante debe ser tal que su resultante y el momento resultante respecto de un punto sean ambos nulos. Obsérvese la importancia del momento resultante: puede haber casos en los que $\mathbf{R} = 0$ y no necesariamente haya equilibrio. Son los dados por *pares* de fuerzas que tienen resultante nula pero momento $\mathbf{M} \neq 0$.

Una noción muy importante en la estática y dinámica del cuerpo rígido es la de *sistema equivalente de fuerzas*. En las ecuaciones de movimiento (5.12) y (5.13) y en las condiciones de equilibrio (5.23) y (5.24) sólo intervienen la resultante y el momento total

21. En realidad se trata de *seis* ecuaciones, en las seis funciones P_x, P_y, P_z, y L_x, L_y, L_z.

del sistema de fuerzas, y no cada fuerza en forma individual. Habrá, por lo tanto, infinitos sistemas de fuerzas de acción dinámica equivalente: todos aquellos que tengan igual resultante e igual momento total.

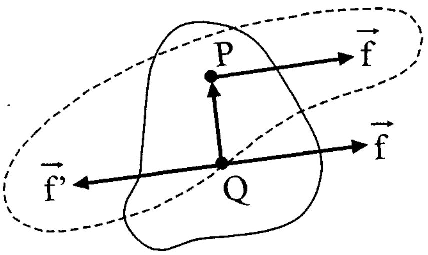


Estudiaremos aquí algunos ejemplos sencillos, pero importantes, de sistemas de fuerzas equivalentes. Consideremos primero el caso de una única fuerza **f** que actúa sobre un cuerpo rígido, aplicada a un punto dado P. El sistema correspondiente a este caso tiene, entonces, resultante **R** = **f**, y momento resultante respecto del centro de masa: **M** = **r** x **f**. Cualquier otro sistema de fuerzas que tenga la misma resultante y el mismo momento total que los arriba indicados será equivalente, o sea, producirá la misma acción dinámica sobre el cuerpo en cuestión. Consideremos un sistema formado por una única fuerza **f'** igual a la **f**, que está sobre la misma recta de acción que la **f**, pero aplicada en un punto P'. Ese sistema tendrá por resultante y momento total:

$$\mathbf{R'} = \mathbf{f'} = \mathbf{f} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{M'} = \mathbf{r'} \times \mathbf{f'} = (\mathbf{r} + \mathbf{PP'}) \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{PP'} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{M}$$

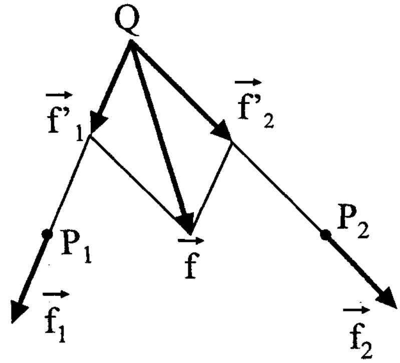
por ser **PP' x f** = 0. En otras palabras, dada una fuerza aplicada a un punto P podemos obtener un sistema equivalente, desplazando la fuerza sobre la recta de acción a otro punto cualquiera. Por ello se suele decir que "una fuerza puede desplazarse sobre su recta de acción" –esto no modifica su acción sobre el cuerpo rígido.

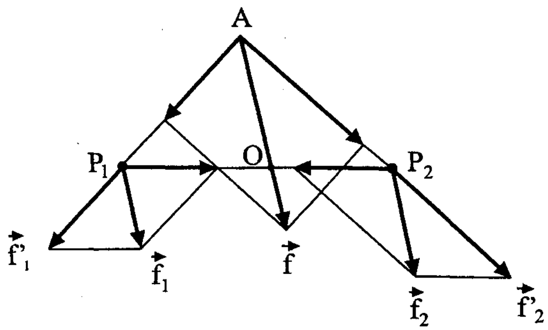


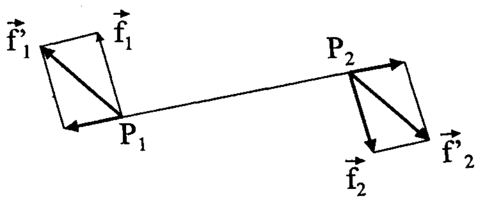
Consideremos nuevamente el sistema formado por la única fuerza **f**, aplicada al punto P. Introduzcamos ahora dos fuerzas iguales y de sentido contrario **f** y **f'** = –**f**, aplicadas en el punto Q. Es evidente que estas dos fuerzas que se anulan mutuamente no cambian la resultante ni el momento total. Pero, observando el dibujo, puede considerarse un sistema equivalente en la siguiente forma: una fuerza **f** igual a la original, aplicada en el punto Q (o sea, de recta de acción distinta, paralela a la anterior), y un par de fuerzas **f**, **f'** cuyo momento **QP** x **f** es perpendicular al plano que pasa por PQ y que contiene a **f**. En otras palabras: dada una fuerza aplicada a un punto P, podemos obtener un sistema equivalente, desplazando la recta de acción paralelamente a sí misma, con tal de *añadir* un momento de módulo fd (d: distancia entre las dos rectas), perpendicular al plano determinado por esas dos rectas y de sentido fijado por la regla del tirabuzón.

Supongamos ahora un sistema de dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, contenidas en un plano y aplicadas en los puntos P_1 y P_2. Un sistema equivalente será el de las fuerzas $\mathbf{f'}_1 = \mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f'}_2 = \mathbf{f}_2$, aplicadas al punto de intersección Q. El vector suma geométrica, **f**, también constituye un sistema equivalente, por cuanto su resultante es $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, y su momento respecto de cualquier punto es igual a la suma de los momentos de $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ (esto se puede demostrar geométricamente; es el "teorema de Varignon"). En general, para un sistema de fuerzas en un plano, de resultante no nula, siempre es posible encontrar un sistema equivalente,

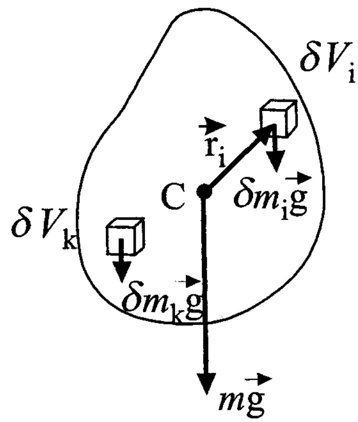
de una única fuerza con una determinada recta de acción. Se puede obtener esa fuerza componiendo gráficamente, dos a dos, las fuerzas intervinientes. Esa única fuerza resultante no debe confundirse con lo que anteriormente hemos llamado resultante **R**; lo que interviene en la (5.12) es $\mathbf{R} = \sum \mathbf{f}_i$, que *no* tiene punto de aplicación, o recta de acción; es simplemente un vector cuyas componentes son las sumas de las componentes de las componentes de las $\mathbf{f}_i$ –nada más–. En cambio, el vector "resultante" **f** en el ejemplo anterior, o, más apropiadamente, el vector "fuerza equivalente", tiene recta de acción *bien definida*: aquélla que garantiza que su momento respecto de cualquier punto sea el mismo que el momento del sistema de fuerzas original. Su módulo, dirección y sentido es igual al vector resultante $\mathbf{R} = \sum \mathbf{f}_i$ que interviene en la (5.12).







Si las dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ del ejemplo inicial son paralelas, se procede a la conocida descomposición de la figura. Para ello descomponemos la $\mathbf{f}_1$ en dos direcciones, la P_2P_1 y una arbitraria P_1A. La fuerza $\mathbf{f}_2$ la descomponemos en la dirección P_2P_1 y otra tal que la componente según P_2P_1 sea igual en módulo pero de sentido contrario a la proyección correspondiente de $\mathbf{f}_1$. De esta manera, llegamos al sistema equivalente (no paralelo) de $\mathbf{f'}_1$ y $\mathbf{f'}_2$, que nos da la "resultante" **f**. Es fácil demostrar que esta última es paralela a $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, y que corta a P_2P_1 en un punto O tal que $f_1\overline{P_1O} = f_2\overline{P_2O}$.



Finalmente, si la resultante es nula (*par* de fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$), no es posible reemplazar el sistema por una sola fuerza equivalente. En cambio lo podemos reemplazar por un par equivalente $\mathbf{f'}_1$ y $\mathbf{f'}_2$, como en la figura. Si las fuerzas no están en un plano, es preferible utilizar el método analítico. Se puede demostrar que cualquier sistema de fuerzas en el espacio siempre se puede reducir a un sistema equivalente de una única fuerza, y un par o cupla.

Consideremos, finalmente, el sistema de fuerzas de atracción gravitatoria, que actúan sobre cada una de las masas δm_i en los elementos de volumen δV_i de un cuerpo rígido. (Por esto, ese tipo de fuerzas se llaman "fuerzas de volumen".)

La resultante de estas fuerzas es:

$$\mathbf{R}_{\text{grav}} = \sum \delta m_i \mathbf{g} = m\mathbf{g} \qquad (5.23)$$

El momento de estas fuerzas de atracción gravitatoria respecto del centro de masa es

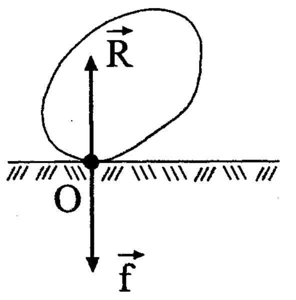
$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \, \mathrm{x} \, \delta m_i \mathbf{g} = \left(\int \rho \, \mathbf{r} \, dV\right) \mathrm{x} \, \mathbf{g} = 0$$

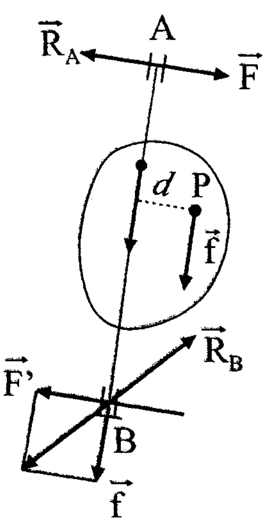
por la (5.15). Por lo tanto, las fuerzas de atracción gravitacional tienen un sistema equivalente que consiste de una única fuerza, el *peso* $m\mathbf{g}$, aplicada al centro de masa. Por eso, el centro de masa se llama también *centro de gravedad.* Obsérvese bien que, al hablar del "peso" de un cuerpo rígido, uno se refiere a la fuerza equivalente (pero inexistente físicamente) que reemplaza la acción de las infinitas fuercitas $\delta m_i \mathbf{g}$ (que son las que existen físicamente). Se ve entonces que el peso sólo afecta el movimiento de traslación de un cuerpo (5.12), no teniendo influencia sobre el movimiento de rotación.

El centro de gravedad sólo coincide con el centro de masa cuando la intensidad del campo gravitatorio **g** es la misma para todos los puntos del cuerpo. Cuando esto no sucede (Luna en el campo gravitatorio terrestre), el centro de masa y el centro de gravedad son puntos diferentes.

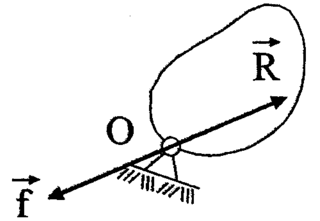
Estudiemos las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido *vinculado*. Hay diferentes formas de vincular un cuerpo rígido:

a) *Apoyo puntual* sobre un plano liso, sin frotamiento. El vínculo sólo puede ejercer una reacción perpendicular, dirigida hacia arriba. Sólo habrá equilibrio si el sistema de fuerzas exteriores tiene por sistema equivalente una única fuerza **f** que pasa por el punto de contacto O, es perpendicular al plano y tiene sentido hacia éste. Esto quiero decir que el momento total respecto de O debe ser cero y que la resultante debe ser perpendicular al plano, con sentido hacia abajo.



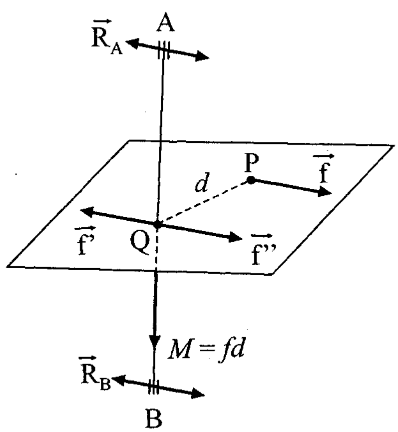


b) *Punto fijo* mediante una articulación. La reacción de vínculo pasa por O y puede tener cualquier dirección y sentido. Por lo tanto, sólo habrá equilibrio si el sistema de fuerzas aplicado al cuerpo tiene por sistema equivalente una única fuerza **f** que pasa por O. Esto significa que el momento total del sistema respecto de O debe ser cero (no hay otra condición).



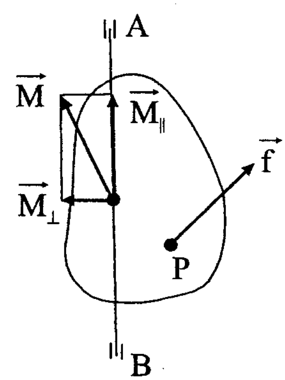
c) *Eje fijo*, sin frotamiento. Consideremos los puntos A y B del eje y una fuerza **f** paralela al eje, aplicada en el punto P. Si trasladamos la fuerza paralelamente hasta el eje,

debemos introducir un momento de módulo $f.d$ y dirección perpendicular al plano del papel. Ese momento tiene por par equivalente a las fuerzas **F** y **F'** (donde $F = f\, d / \overline{AB}$) aplicadas en A y B. Tanto la fuerza **f** desplazada al eje como el par **F**, **F'** serán anuladas por las reacciones de vínculo $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$ en A y B.



Sea ahora, en cambio, una fuerza **f** contenida en un plano perpendicular el eje. Al trasladarla paralelamente hasta el punto Q, debe introducirse un momento **M** dado por el par **f'**, **f''**, de dirección paralela al eje. Es fácil comprobar que es imposible encontrar un par equivalente de fuerzas aplicados en los puntos A y B, cuyo momento sea el del par **f**, **f'**. Por lo tanto, si bien la fuerza trasladada **f''** podrá ser absorbida en los vínculos A y B, el momento de **f** respecto del eje no encontrará oposición (a menos que haya frotamiento estático en los cojinetes del eje).

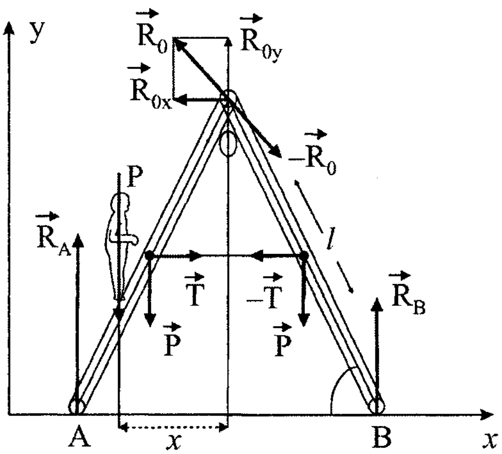
En el caso general de una fuerza de dirección cualquiera actuando sobre un cuerpo con eje fijo (sin frotamiento), el momento que actuará libremente, sin encontrar resistencia en el vínculo, será, entonces, la proyección $\mathbf{M}_{\parallel}$ del momento total sobre el eje. La componente perpendicular $\mathbf{M}_{\perp}$ será anulada por reacciones de vínculo en los puntos de empotramiento del eje. En resumen, un cuerpo rígido con un eje fijo sólo estará en equilibrio si la componente del momento total según el eje es cero.



Como único ejemplo de estática del cuerpo rígido, discutiremos el clásico problema de la escalera. Sea una escalera que consta de dos partes rígidas, de longitud l, apoyadas sin frotamiento en el suelo, formando cada una un ángulo α con la horizontal. Una cuerda une las dos mitades a la altura $l/2$. El peso de cada mitad es **p**. En el punto O, una articulación (sin frotamiento) une las dos partes. Se desea determinar las reacciones de vínculo y la tensión en la cuerda en función de la posición en la que se encuentra sobre la escalera un individuo de peso **P**.

Ubicando el sistema de coordenadas como en la figura y suponiendo al hombre parado en una posición genérica cuya distancia horizontal a la proyección del punto O vale x, es necesario, como *primer paso*, anotar y dibujar en el gráfico todas las fuerzas aplicadas sobre cada uno de los dos cuerpos rígidos (las dos mitades de la escalera) vinculados entre sí. Sobre la mitad izquierda actuarán: reacción $\mathbf{R}_A$; reacción $\mathbf{R}_O$ (interacción con el otro cuerpo); tensión del hilo **T** (otra interacción más con la mitad derecha); peso propio **p** y carga **P** (peso del individuo).

Sobre la mitad derecha actuarán: reacción $\mathbf{R}_B$; reacción $-\mathbf{R}_B$; tensión del hilo $-\mathbf{T}$ y peso propio **p**. La reacción en la articulación O tendrá por componentes $\mathbf{R}_{Ox}$ y $\mathbf{R}_O$, para la mitad izquierda, y los mismos valores cambiados de signo, para la mitad derecha.



El *segundo paso* consiste en la consideración de las ecuaciones de equilibrio (5.21) y (5.22). Pero, antes de escribirlas, es necesario proceder a la elección del centro de momentos para la (5.22). Para ello se sigue la siguiente "receta": elíjase como centro de momentos aquel punto que haga desaparecer el mayor número posible de fuerzas incógnitas en la ecuación de momentos (5.22). En nuestro caso, el punto O cumple precisamente con tal requisito.

El *tercer paso* es el planteo de las ecuaciones de equilibrio y la verificación de la posibilidad de resolverlas (número de componentes de fuerzas incógnitas igual al número total de ecuaciones algebraicas). Si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema está estáticamente indeterminado (sólo relaciones adicionales, como las dadas por fuerzas de frotamiento o deformaciones elásticas, permitirán la resolución de sistemas indeterminados). Si, en cambio, aparecen más ecuaciones que incógnitas, no puede haber equilibrio. En nuestro caso, las ecuaciones (5.21) y (5.22) llevan al siguiente sistema:

Izquierda:

$$-R_{OX}+T=0 \qquad \text{Resultante, eje X.}$$

$$R_A-P-p+R_{OY}=0 \qquad \text{Resultante, eje Y.}$$

$$-R_A\times l\times Cos(\alpha)+P\times x+p\times\frac{l}{2}\times Cos(\alpha)+T\times\frac{l}{2}\times Sin(\alpha)=0 \qquad \text{Momento resultante según O.}$$

Derecha:

$$R_{OX}-T=0 \qquad \text{Resultante, eje X}$$

$$R_B-p-R_{OY}=0 \qquad \text{Resultante, eje Y}$$

$$-T\times\frac{l}{2}\times Sin(\alpha)-p\times\frac{l}{2}\times Cos(\alpha)+R_B\times l\times Cos(\alpha)=0 \qquad \text{Momento resultante según O.}$$

Obtenemos seis ecuaciones con cinco incógnitas R_A, R_B, R_{Ox}, R_{Oy} y T. Sin embargo, sólo cinco de las ecuaciones son independientes (las ecuaciones según x son idénticas para los dos cuerpos). Por lo tanto, habrá una solución única. Resolviendo, obtenemos

$$R_A=\frac{P}{2}\left(1+\frac{x}{l\cos\alpha}\right)+p$$

$$R_B=\frac{P}{2}\left(1-\frac{x}{l\cos\alpha}\right)+p$$

Obsérvese que para $x=0$ (hombre parado en el tope de la escalera), $R_A=R_B=P/2+p$. (El peso del hombre se reparte en partes iguales sobre las reacciones.) Para $x=\cos\alpha$ (el hombre está parado en la parte más baja en la mitad izquierda), $R_A=P+p$ y $R_B=p$. Para la tensión obtenemos

$$T = \left[P \left(1 - \frac{x}{l \cos\alpha} \right) + p \right] \operatorname{cotg}\alpha$$

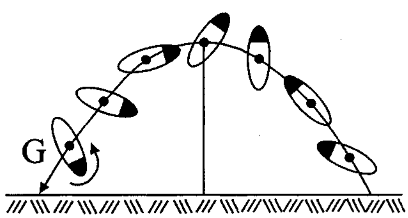
Nuevamente, para el caso $x = 0$, la tensión es máxima y vale $T = (P + p)$ cotg α.. Para $x = l\cos\alpha$, la tensión vale $T = p\operatorname{cotg}\alpha$ y representa la tensión para el caso de la escalera sola, sin carga. Obsérvese que la tensión es proporcional a $\operatorname{cotg}\alpha$, siendo entonces tanto mayor cuanto más abierta está la escalera. Finalmente, para la reacción en la articulación vale $R_{Ox} = T$, y

$$R_{Oy} = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{x}{l\cos\alpha} \right)$$

Esto muestra que esta reacción de ninguna manera es horizontal como, quizás, podría haber parecido en un principio. La componente vertical es máxima para $x = 0$ (hombre en el tope) y vale $P/2$. Es precisamente la reacción de la mitad derecha al hecho de transferírsele parte de la carga (peso del hombre). Es un buen ejercicio discutir lo que pasa con **R** y **T** para $\alpha \to 0$.

e) Ejemplos de dinámica del cuerpo rígido libre

La "receta práctica" para la resolución de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido (5.12) y (5.13) es formalmente análoga a la que conviene seguir en el caso estático: en primer lugar, es necesario escribir y dibujar todas las fuerzas exteriores reales o equivalentes, aplicadas al cuerpo (conocidas e incógnitas). Luego, es necesario elegir el centro de momentos para el momento de las fuerzas, el impulso angular y la referencia del movimiento. No siempre conviene elegir el centro de masa; es más práctico elegir aquel punto que haga desaparecer un número máximo de fuerzas incógnitas en la ecuación (5.13). Una vez elegido el centro de momentos, se procede a la integración de las ecuaciones para obtener los impulsos lineal y angular en función del tiempo y de las condiciones iniciales. Conocidos estos impulsos, es posible determinar las velocidades de traslación y angular del cuerpo, a partir de las (5.14) y (5.16), respectivamente (ésta es la parte más engorrosa del problema). Finalmente, a partir del movimiento de traslación y rotación, es posible determinar la posición del cuerpo rígido en función del tiempo.



Como primer ejemplo, discutamos cualitativamente el movimiento de un cuerpo rígido lanzado al aire (despreciando rozamiento). La única fuerza que actuará es el peso, aplicado al

centro de masa (recuérdese que actúan las casi infinitas fuercitas peso de cada molécula del cuerpo, pero que éstas tienen por sistema equivalente el de una única fuerza (5.23) aplicada al centro de gravedad). Las ecuaciones referidas al centro de masa o de gravedad serán, entonces:

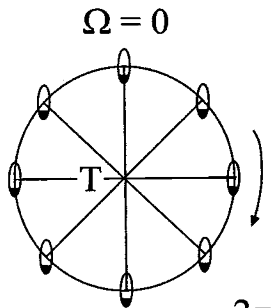
$$\mathbf{R} = m\mathbf{g} = m\frac{d\mathbf{v}_G}{dt}$$

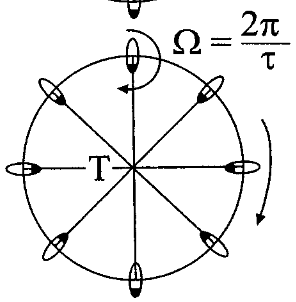
$$\mathbf{M} = 0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

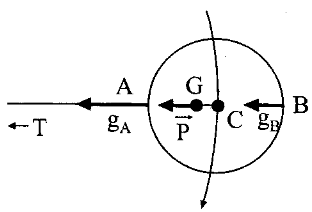
El centro de gravedad se mueve entonces con aceleración constante e igual a la de la gravedad: seguirá, por lo tanto, una parábola de tiro (capítulo 3 e) determinada por las condiciones iniciales (velocidad y posición del centro de gravedad). La ecuación para las rotaciones, integrada, nos dice que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 =$ cte. El valor constante de $\mathbf{L}$ estará fijado por el vector velocidad de rotación inicial, a través de la (5.16) o, más sencillamente, por la (5.19a). Obsérvese que, como en general $\mathbf{L}$ y Ω no son de la misma dirección, y como lo que debe permanecer constante en este movimiento es el vector impulso angular $\mathbf{L}$, el vector Ω no será constante durante el movimiento. El resultado es un movimiento de revolución alrededor del centro de gravedad muy complicado ("movimiento de Poinsot"). Sólo en el caso en que la rotación inicial ocurra alrededor de un eje principal de inercia, la constancia de $\mathbf{L}$ implicará también la constancia de Ω.

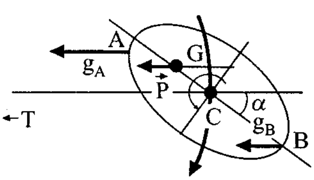
Aquí conviene introducir una pequeña disquisición sobre el concepto de cuerpo puntual. Sea un cuerpo rígido "muy pequeño" tal que no se pueda distinguir físicamente un punto de otro (error en la determinación de la posición mayor que el diámetro del cuerpo, o cuerpo muy pequeño con respecto a las distancias a otros cuerpos). En ese caso, el movimiento de rotación dado por la (5.13) no se podrá determinar, por no poder dar las condiciones iniciales para el movimiento de rotación y por no poder precisar los puntos de aplicación de las fuerzas (y, con ello, sus momentos). En cambio, la (5.12) tiene significado completo, pues si bien no podremos ubicar el centro de masa con mayor precisión que las dimensiones del cuerpo, podremos predecir su movimiento sobre la base de la resultante de las fuerzas (para lo cual no necesitamos conocer los respectivos puntos de aplicación). Pero la (5.12) es, para este caso, formalmente idéntica a la ecuación de Newton para una masa puntual (3.5). En otras palabras, ahora podemos precisar aún más la noción de cuerpo puntual: es un cuerpo rígido en el que *despreciamos* el movimiento de rotación (o sea, despreciamos el spin y la energía cinética de rotación).

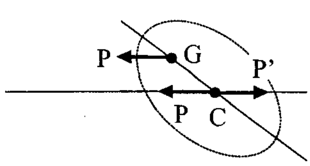
Estudiemos ahora el caso de un satélite, considerado como cuerpo rígido, puesto en órbita: nuevamente, la única fuerza actuante es la atracción de la gravedad, aplicada al centro de masa. Este punto del cuerpo ejecutará, entonces, un movimiento kepleriano alrededor de la Tierra. A su vez, el satélite ejecutará un movimiento de rotación alrededor del centro de masa, manteniendo $\mathbf{L} =$ cte. Si el eje de rotación inicial era un eje principal, el cuerpo mantendrá ese eje constante durante su movimiento. En particular, si en el instante inicial $\Omega = 0$, el satélite ejecutará un movimiento de traslación pura, como en la figura (obsérvese bien nuevamente: ¡*no* se trata de un movimiento de rotación, pues todos sus puntos tienen la misma velocidad!). Por otra parte, para que el satélite muestre siempre la misma cara hacia la Tierra (como en los satélites de sensoramiento remoto, que tienen una cámara de televisión), es necesario darle una rotación inicial $\Omega = 2\pi/\tau$

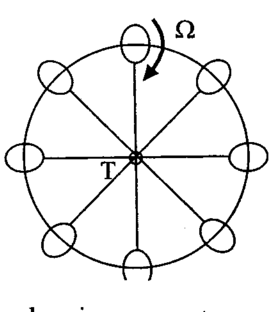








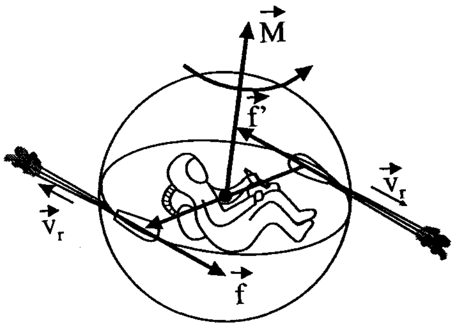




(τ : período de revolución), perpendicular a la órbita y paralela a un eje principal (en la práctica, el asunto es más complicado).

Consideremos el caso de la Luna como satélite. La Luna es un cuerpo tan grande que el campo gravitatorio terrestre, responsable de su movimiento, varía apreciablemente entre el punto más cercano y el punto más alejado de la Luna. Por tal razón, el centro de gravedad y el centro de masa de la Luna *no coinciden* (página 176); en particular, es fácil ver que el centro de gravedad estará más cerca de la Tierra que el centro de masa. Si la Luna fuese exactamente esférica, ello no influiría en absoluto sobre el movimiento de la Luna, pues el peso de la Luna seguiría teniendo un momento nulo respecto del centro de masa. Pero la Luna no es esférica sino elipsoidal. Si el eje mayor de la Luna está desplazado en un ángulo respecto de la línea Tierra-Luna, aparecerá un momento del peso de la Luna respecto del centro de masa que inducirá una rotación como la indicada en la figura, sin por ello afectar el movimiento del centro de masa. Esto se ve con particular sencillez si se considera el sistema equivalente de fuerzas, dado en la figura, en el que aparece el peso trasladado al centro de masa (responsable del movimiento de traslación orbital), y un par de fuerzas (responsable de una rotación alrededor del centro de masa). El movimiento de "equilibrio", para el cual el momento respecto del centro de masa es nulo en todo instante, es aquél en que el diámetro mayor de la Luna siempre apunta hacia el centro de la Tierra; o sea, aquel en que la Luna rota alrededor de un eje principal (su diámetro menor) con un período igual al de giro orbital (27,3 días). Como, efectivamente, la Luna siempre nos muestra la misma cara (la que precisamente es normal al diámetro mayor), significa que, con el correr de los miles de millones de años, la Luna ha alcanzado paulatinamente esa "posición" de equilibrio (¡sería absurdo suponer que la ha tenido desde un principio!). La razón por la cual ha alcanzado este equilibrio de rotación es que la fracción de energía cinética que correspondió inicialmente a esa rotación adicional "productora de momento" alrededor del centro de masa se disipó en forma de trabajo de fuerzas elásticas de deformación (fuerzas tectónicas) en el interior de la Luna (la Luna alcanzó el estado de energía mecánica total mínima).

El siguiente ejemplo será el estudio del mecanismo de orientación para un satélite tripulado. Consiste en pequeñas toberas tangenciales a la superficie del artefacto, de las que se eyecta en forma controlada por el astronauta un chorro de gas, de un caudal μ y a una velocidad relativa v_r. Cada tobera puede ejercer, entonces, sobre el satélite una pequeña fuerza de retropropulsión (4.6) $\mathbf{f} = -\mu\,\mathbf{v}_r$. Supongamos, para simplificar, un satélite esférico macizo y homogéneo. Ante



todo, para que el mecanismo de orientación no altere la órbita del satélite (el movimiento de su centro de masa), es imprescindible, de acuerdo con la (5.12), que $\mathbf{R} = 0$, o sea, que las toberas actúen por *pares opuestos*. En ese caso, el módulo del momento (¡independiente del centro de momentos!) vale $M = 2\ r\ f$. De acuerdo con la (5.13) tendremos (en la esfera todos los diámetros son ejes principales):

$$M = \frac{dL}{dt} = I^* \frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{5} mr^2 \frac{d\Omega}{dt}$$

Durante la acción del mecanismo aparecerá, entonces, una aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{5}{2}\frac{M}{mr^2} = 5\frac{\mu v_r}{mr}$$

Como **M** (y, con ello, $d\Omega$) es perpendicular al plano del par de toberas, es necesario disponer de tres pares de toberas en planos perpendiculares entre sí para poder modificar la orientación en cualquier dirección. Obsérvese que si multiplicamos la ecuación de movimiento anterior por el ángulo $d\varphi$ infinitesimal en que rotó el cuerpo en el tiempo dt, obtenemos

$$M\,d\varphi = I^* \frac{d\Omega}{dt} d\varphi = I^* \Omega\, d\Omega = \frac{1}{2} I^* d\left(\Omega^2\right)$$

Integrando esta expresión, queda

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M\,d\varphi = \frac{1}{2} I^* \Omega^2 - \frac{1}{2} I^* \Omega_0^2 = \Delta T_{\text{rot}} \qquad (5.24)$$

Es fácil comprobar que la integral del momento respecto del ángulo de giro representa el trabajo del par de fuerzas equivalente (la maniobra completa para el cambio a otra orientación *fija* por supuesto requiere una deceleración a efectos de detener la rotación impartida inicialmente).

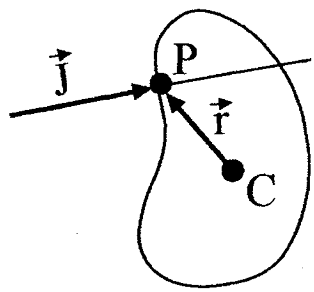
Otra forma de orientar un satélite, o de modificar su movimiento de rotación, consiste en cambiar su distribución de masa (cambiar el momento de inercia). Para mayor simplicidad, supongamos un cuerpo que gira, libre de momentos, alrededor de un eje principal. En un momento dado se produce un desplazamiento de las masas que forman el cuerpo (por ejemplo, se despliegan las antenas de un satélite). Suponiendo que en ese desplazamiento no se modifican las direcciones de los ejes principales (ésta es una gran limitación), tendremos, teniendo en cuenta la constancia del impulso angular ($\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = 0$):

$$L = I^*\Omega = I_0^*\Omega_0 = \text{cte.} \qquad (5.25)$$

O sea, la velocidad angular alrededor del eje principal habrá cambiado a un nuevo valor dado por

$$\Omega = \Omega_0 \frac{I_0^*}{I^*}$$

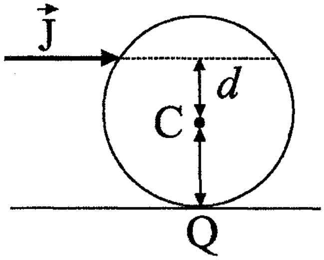
En general, para un cuerpo rígido libre de momentos exteriores, el movimiento de rotación cambiará al modificarse la forma del cuerpo. Esto es bien conocido y aprovechado por los que practican salto de trampolín y, en particular, por los gatos, cuya cola no es más que un aparato para cambiar el momento de inercia. En estos ejemplos de variación de rotaciones por cambios en la forma de un cuerpo, la energía cinética de rotación (5.20b) no se mantiene constante. Como la energía cinética de traslación (5.20a) no se altera, la energía total del cuerpo se modifica. Ello quiere decir que en alguna parte debe realizarse trabajo: son las fuerzas *internas* que necesariamente aparecen y trabajan cuando se produce un desplazamiento interno de masas del cuerpo. En otras palabras, cuando un gato en caída libre encoge su cola (disminuye su momento de inercia) para rotar más rápidamente, debe realizar trabajo. El aumento de su energía cinética de rotación es provisto por el trabajo de las fuerzas musculares en su cola. La relación (5.24) no es válida cuando el momento de inercia es variable.



El último ejemplo para un cuerpo rígido libre corresponde al caso de una *percusión* (4.27). Con este nombre llamamos a la acción de una fuerza muy grande (un "golpe seco") aplicada en el punto P, durante un intervalo de tiempo extremadamente corto, pero de tal manera que $\mathbf{J} = \int \mathbf{f}\, dt$ sea de valor finito. Integrando las ecuaciones (5.12) y (5.13), tendremos, para este caso:

$$\Delta\mathbf{P} = \int \mathbf{f}(t')dt' = \mathbf{J}$$

$$\Delta\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f}(t')dt' = \mathbf{r} \times \mathbf{J}$$



Por lo tanto, el vector percusión **J** nos da directamente la variación del impulso lineal del cuerpo (y, con ello, por la (5.14), la variación de la velocidad del centro de masa). El momento de **J** respecto de un punto dado, por ejemplo, el centro de masa, nos da la variación del vector impulso angular (y, con ello, a través de la (5.16) o la (5.19a), la variación del vector velocidad angular). Ilustraremos esto con el caso de una bola de billar, inicialmente en reposo, golpeada horizontalmente en la forma de la figura (obsérvese que el peso y la reacción de vínculo siempre tienen resultante y momento total nulos). Tendremos entonces:

$$J = m\ \left(v_C - v_C^0\right) = m\, v_C \quad \therefore \quad v_C = \frac{J}{m}$$

$$J\, d = I\ \left(\Omega - \Omega_0\right) = I\, \Omega \quad \therefore \quad \Omega = \frac{5}{2}\frac{J\, d}{m\, r^2}$$

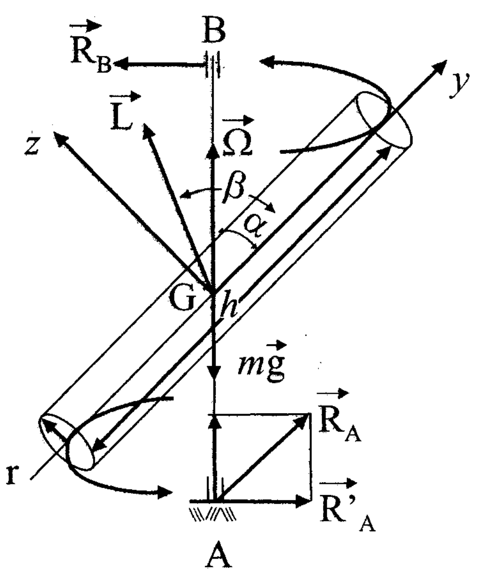
En el caso particular $d = 0$ (golpe central), la bola saldrá inicialmente sin rotar, resbalando en el punto de contacto con el paño. La fuerza de frotamiento que aparecerá, de sentido opuesto al movimiento, frenará el movimiento del centro de masa, a cambio de la iniciación de un movimiento de rotación. Es fácil verificar, teniendo en cuenta la (5.11a), que la velocidad del punto de contacto Q será en el instante inicial igual a

$$v_Q = v_c - \Omega\, r = \frac{J}{m}\left(1 - \frac{5}{2}\frac{d}{r}\right)$$

(contando el parámetro de impacto d positivo hacia arriba, y sólo para una percusión en el plano meridiano vertical). Por lo tanto, solamente para $d_0 = + 2/5\ r$, la bola sale sin resbalar y, por ello, con velocidad de traslación constante. En cualquier otro caso, la fuerza de frotamiento en Q induce aceleraciones en el movimiento de traslación de la bola, que pueden llevar a efectos curiosos, muy importantes en el juego del billar. El estudio exhaustivo del movimiento de una bola de billar es, posiblemente, el ejemplo más ilustrativo y que más claramente enseña la dinámica del cuerpo rígido.

f) Ejemplos de dinámica del cuerpo rígido vinculado

Consideremos el caso de un cuerpo rígido de forma cilíndrica, que rota alrededor de un eje fijo y que forma un ángulo α con el eje del cilindro, pasando por el centro de gravedad. Las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo son su peso y las reacciones en A y B (suponemos que esta última sólo puede ser horizontal, como en el caso de un cojinete). Como ninguna de estas fuerzas tiene momento en la dirección del eje (no hay fricción), tendremos según la (5.13) y la (5.17) $M_\Omega = dL_\Omega/dt = 0$, o sea $L_\Omega = I\Omega = \text{cte.}$ El cuerpo rotará con velocidad angular constante, mientras no cambie el momento de inercia respecto del eje de rotación (mientras que el cuerpo no cambie de forma o de orientación). Vamos a calcular ahora las reacciones $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$.



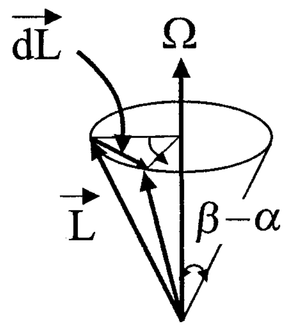
Para ello debemos partir de las ecuaciones completas (5.12) y (5.11):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{GA} \times \mathbf{R}_A + \mathbf{GB} \times \mathbf{R}_B$$

Como $d\mathbf{P}/dt = m\mathbf{a}_G = 0$, tenemos $\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = -m\mathbf{g}$. Es decir que la componente normal de la $\mathbf{R}_A$ es opuesta al peso del cuerpo. Su componente horizontal $\mathbf{R'}_A$ será opuesta a la reacción $\mathbf{R}_B$.

En la segunda ecuación de movimiento es necesario tener en cuenta que en este caso **L** tendrá una dirección diferente de Ω. Estará en el plano de los ejes principales *y*, *z*, y tendrá por componentes, de acuerdo con la (5.19a):



$$L_y = I_y^* \Omega \cos\alpha \qquad\qquad L_z = I_z^* \Omega \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Donde $I_y^* = 1/2\, mr^2$ e $I_z^* = 1/4\, m r^2 + 1/12\, m h^2$, para este caso. Por lo tanto, el vector **L** forma con el eje del paralelepípedo un ángulo β dado por

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{L_z}{L_y} = \frac{I_z^*}{I_y^*}\,\mathrm{tg}\alpha$$

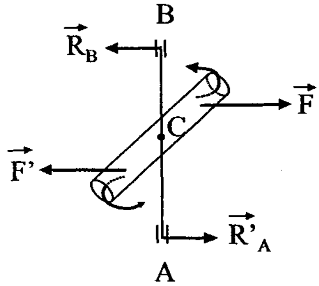
Obsérvese que β es independiente del módulo de Ω. Por lo tanto, el vector **L** girará alrededor del eje AB con una velocidad angular Ω, describiendo un cono. En un intervalo *dt*, el vector variación **dL** será normal al plano *y z*, y dirigido hacia adelante en la figura (eje *x*). Su valor será $dL_x = L\,\mathrm{sen}(\beta - \alpha)\,\Omega dt$. Por tanto, de acuerdo con la (5.13):

$$\frac{dL_x}{dt} = L\Omega \;\; \mathrm{sen}(\beta - \alpha) = M_x$$

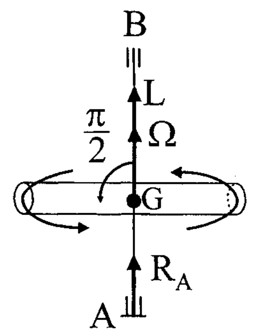
Teniendo en cuenta las expresiones de arriba para las componentes de **L** y para β, es fácil deducir, con un poco de trigonometría, que

$$M_x = L\Omega\,\mathrm{sen}(\beta - \alpha) = \Omega^2 \left(I_z^* - I_y^*\right) \mathrm{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\Omega^2 \left(I_z^* - I_y^*\right) \;\mathrm{sen}2\alpha$$

Las otras componentes de **M** son nulas, por serlo las componentes de **dL**. La reacción $\mathbf{R}_B$ y la componente horizontal $\mathbf{R'}_A$ están, entonces, en el plano de **L** y Ω (plano *y z*), y su valor será $R_B = R'_A$. Por supuesto, este par rota con el cuerpo. Se suele presentar, erróneamente, a este par como reacciones a las “fuerzas centrífugas” **F** y **F’**, que “actúan”

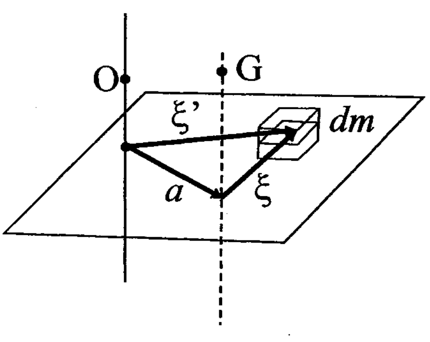


sobre las dos porciones del cuerpo, como está indicado en la figura (ver más adelante, capítulo 5 h). Estas fuerzas *no existen* para el sistema inercial que estamos utilizando en la descripción. El par de reacciones es simplemente aquel cuyo momento hace falta para cambiar continuamente el impulso angular **L** del cuerpo, para que éste rote alrededor del eje prefijado. Obsérvese que si $I_y^* = I_z^*$, el par de esas reacciones siempre será nulo, cualquiera sea la inclinación del eje. Esto ocurre para un cilindro sólo si $r = h/\sqrt{3}$. En cambio, cualesquiera sean I_y^* e I_z^*, el par de reacciones será nulo, si $\alpha = 0$ o si $\alpha = \pi/2$. Esto ocurrirá precisamente si el cuerpo rota alrededor de un eje principal. Como en este caso **L** es paralelo a Ω, y por lo tanto constante, no hace falta ningún momento exterior para mantener la rotación alrededor del eje fijo. La única reacción en ese caso es la que se opone al peso.



Sea ahora un cuerpo que gira alrededor de un eje que no pasa por el centro de masa. En ese caso la ecuación de movimiento es (basta considerar la proyección de la (5.13) sobre el eje):

$$\left|\sum \mathbf{r}_i \,\mathbf{x}\, \mathbf{f}_i\right|_\Omega + \left|\mathbf{r}_G \,\mathbf{x}\, m\mathbf{g}\right|_\Omega = \frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = I'\frac{d\Omega}{dt}$$



Ahora *I'* es el momento de inercia respecto de un eje que no pasa por el centro de gravedad. Pero mostraremos que no es necesario volver a calcular la integral $\int \rho \xi^2 dV$ respecto de ese eje, si ya se conoce el momento de inercia *I* respecto de un eje paralelo que pasa por G. Efectivamente, consideremos un elemento *dm* y dos ejes perpendiculares al papel, uno que pasa por el centro de masa y otro que pasa por el punto O. Introduciendo los vectores ξ, ξ' y **a**, como en la figura, tenemos $\xi' = \xi + \mathbf{a}$. Entonces, $\xi'^2 = \xi' \bullet \xi' = (\xi + \mathbf{a}) \bullet (\xi + \mathbf{a}) = \xi^2 + a^2 + 2\mathbf{a} \bullet \xi$.

O sea:

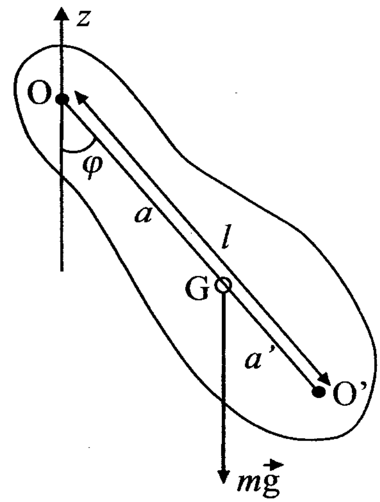
$$I' = \int \rho \xi'^2 \, dV = \int \rho \xi^2 dV + a^2 \int \rho \, dV + 2\mathbf{a} \bullet \int \rho \;\xi \, dV$$

Es fácil demostrar que la última integral es cero, por pasar el eje correspondiente por G (5.15). Entonces

$$I' = I + ma^2 \qquad (5.26)$$

Éste es el "teorema de Steiner", que liga el momento de inercia respecto de un eje cualquiera con el momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad. a es la distancia entre los dos ejes.

Sea ahora un cuerpo suspendido de un eje horizontal, libre de fuerzas exteriores, salvo el peso. Este sistema se denomina "péndulo físico". Entonces, según la figura y la (5.26):



$$mga\,\text{sen}\varphi = \left(I + ma^2\right)\frac{d\Omega}{dt}$$

I es el momento de inercia respecto de un eje paralelo por G. Como $\Omega = d\varphi/dt$, tenemos la ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{mga}{I + ma^2}\text{sen}\varphi$$

Ésta es la ecuación diferencial del movimiento de un péndulo físico. Para pequeñas amplitudes $\text{sen}\varphi \approx \varphi$. Entonces:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{mga}{I + ma^2}\varphi$$

Ésta es idéntica a la ecuación del movimiento armónico (3.19), de pulsación

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I + ma^2}} \qquad \text{o período} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{I + ma^2}{mga}}$$

Si ahora suspendemos el mismo cuerpo de un eje que pasa por un punto O', situado del otro lado del punto G, tendremos:

$$\tau' = 2\pi\sqrt{\frac{I + ma'^2}{mga'}}$$

Hallaremos la distancia a' para la cual $\tau = \tau'$:

$$\frac{I + ma'^2}{mga'} = \frac{I + ma^2}{mga} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{I}{a'} + ma' = \frac{I}{a} + ma$$

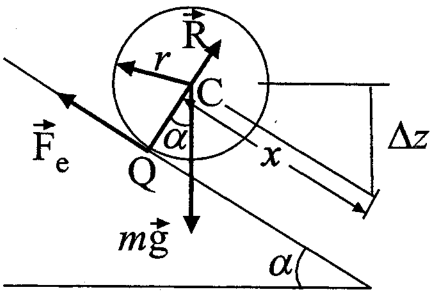
La solución de esta ecuación es $a' = I/ma$. Sumando, obtenemos

$$a + a' = l = a + \frac{I}{ma} = \frac{I + ma^2}{ma}$$

O sea, podemos escribir el período de un péndulo físico en la forma (3.22):

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Aparece el período expresado en función de la longitud l, distancia entre los dos ejes O y O' que dan el mismo período de oscilación. Obsérvese que, de acuerdo con la (3.22), es igual a la longitud que tendría un péndulo ideal (de una masa puntual) del mismo período. La determinación experimental de τ y l permite la determinación muy exacta de g (péndulo "reversible"), en forma *independiente* del momento de inercia I y de la posición del centro de gravedad, los cuales siempre son difíciles de determinar experimentalmente con gran precisión.



Como último ejemplo de movimiento de un cuerpo rígido con eje prefijado, consideraremos el de un cilindro que rueda sin resbalar por un plano inclinado. En este caso, el eje de rotación está predeterminado, pero no es fijo en el espacio: en cada instante hay un eje de rotación diferente, dado por la generatriz de contacto. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso, la reacción de vínculo **R** y la fuerza de frotamiento estático $\mathbf{F}_e$, que es la que impide que el punto de contacto se deslice. Obsérvese que, de acuerdo con la (3.18), es necesario que $F_e < \mu R$. Para plantear la ecuación de movimiento, es necesario tener en cuenta que la generatriz de contacto es el eje de rotación instantáneo para un movimiento de rotación pura (página 165). Bastará entonces, nuevamente, considerar la ecuación (5.13) en su proyección sobre la generatriz de contacto, para obtener, teniendo en cuenta la (5.26)

$$mgr\,\text{sen}\alpha = \left(I + mr^2\right)\frac{d\Omega}{dt}$$

La velocidad del centro de masa se obtiene de la relación (5.11a), teniendo en cuenta que $v_Q = 0$, $v_C = \Omega r$. La aceleración del centro de masa es, entonces,

$$a_C = r\frac{d\Omega}{dt} = \frac{g\,\text{sen}\alpha}{1 + I/mr^2}$$

Obsérvese que g senα es la aceleración de un cuerpo puntual que resbala sin frotamiento sobre un plano inclinado. Un cuerpo que rueda sin resbalar (o sea con frotamiento

estático) tiene por lo tanto una aceleración menor. Será tanto menor cuanto mayor sea su momento de inercia, aunque su masa total sea la misma. De esa manera se podrá distinguir un cilindro de madera macizo de un cilindro hueco de hierro, de iguales dimensiones, peso total y aspecto exterior. Si ahora queremos obtener la fuerza de frotamiento F_e, bastará plantear la ecuación (5.12) en su proyección a lo largo del plano:

$$-F_e + mg \text{ sen } \alpha = ma_C$$

Queda

$$F_e = mg \,\text{sen}\alpha \left(1 - \frac{1}{1 + I/mr^2}\right) = \frac{mg\,\text{sen}\alpha}{1 + mr^2/I}$$

La condición (3.18a) de frotamiento estático es, para este caso:

$$\frac{mg\,\text{sen}\alpha}{1 + mr^2/I} < \mu mg\,\text{sen}\alpha \qquad \text{o sea} \qquad \text{tg}\alpha < \mu\left(1 + mr^2/I\right)$$

Para el caso del cilindro, queda $\text{tg}\alpha < 3/2\,\mu$, independiente de la masa e independiente del radio.

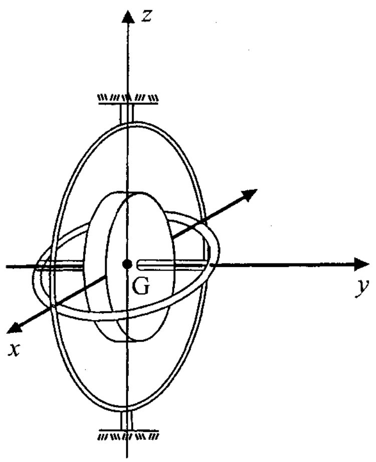
Calculemos, para finalizar, la energía cinética total del cilindro, cuando rodó hasta disminuir la altura de su centro de masa en Δz, partiendo del reposo. De acuerdo con la (5.20b), y teniendo en cuenta que $v_C^2 = 2a_C x = 2g\Delta z/\left(1 + I/mr^2\right)$ y que $\Omega = v_C/r$, tendremos:

$$T = \frac{1}{2} m \frac{2g\Delta z}{1 + I/mr^2} + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\frac{2g\Delta z}{1 + I/mr^2} = mg\Delta z = \Delta V$$

La energía potencial se ha repartido ahora entre energía cinética de rotación y de traslación. A igualdad de masa total, cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la fracción de energía convertida en energía cinética de rotación.

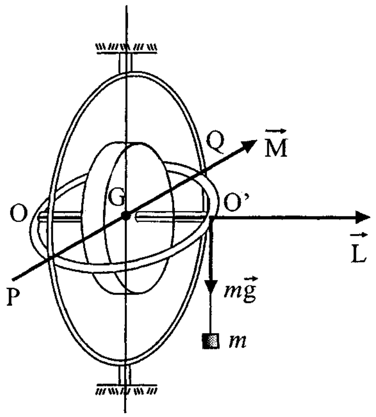
g) Giróscopo y trompo

Estudiemos ahora en forma cualitativa el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo. Tomemos como tal al centro de masa. Esto se logra mediante la suspensión *cardánica*. Los tres ejes se cruzan en el centro de masa, el cual, por lo tanto, permanece fijo. Se supone que la masa de las armazones circulares es despreciable frente a la masa del cuerpo. Además, suponemos que no hay frotamiento en los ejes. Mediante esta suspensión no es posible transmitir momentos al cuerpo rígido. Por tal razón, de acuerdo con la (5.13), su impulso angular **L** será constante. Si el cuerpo estuvo inicialmente rotando alrededor de un eje principal (como sucede en la figura), valdrá $\mathbf{L} = I^*\Omega$ y la constancia



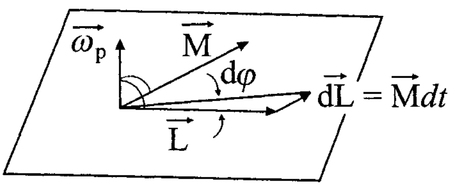
de **L** implicará la constancia de Ω. El eje de rotación apuntará siempre en la misma dirección, independientemente de lo que se haga con el eje exterior AB. Un sistema así se denomina *giróscopo*.

Tomemos ahora el giróscopo con su eje horizontal, e intentemos inclinarlo aplicando una fuerza (colgando una pesa $m\mathbf{g}$), como en la figura. Esa fuerza tiene un momento **M** según el eje PQ. Según la (5.13), $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$. O sea, en un pequeño intervalo dt, el vector **L**, de dirección OO', habrá variado en $d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt$. Pero **M**, y con ello $d\mathbf{L}$, es perpendicular a **L**, teniendo la dirección PQ. Eso quiere decir que el vector impulso angular –y, con él, el vector Ω– habrá girado en $d\varphi$ en el plano que contiene OO' y PQ. O sea, en vez de inclinarse en la dirección de la fuerza, como se esperaría intuitivamente, el giróscopo comienza a girar alrededor del eje vertical AB. Si se mantiene la acción de la fuerza, el eje del giróscopo girará alrededor de la vertical AB con una velocidad angular uniforme



$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\Omega} \qquad (5.27)$$

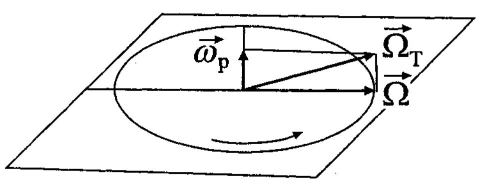
Este movimiento de giro del eje del giróscopo se llama movimiento de *precesión*.



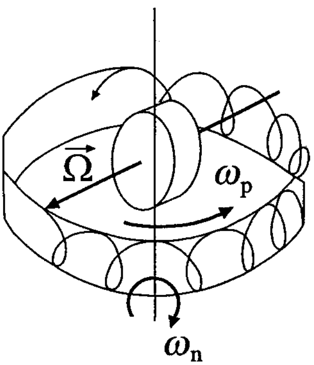
Todo esto vale dentro de ciertos límites. Obsérvese que, durante el movimiento de precesión, el giróscopo tiene, en realidad, un vector rotación instantáneo total dado por la superposición de los vectores rotación inicial Ω y rotación de precesión ω_P:

$$\Omega_T = \Omega + \omega_P$$

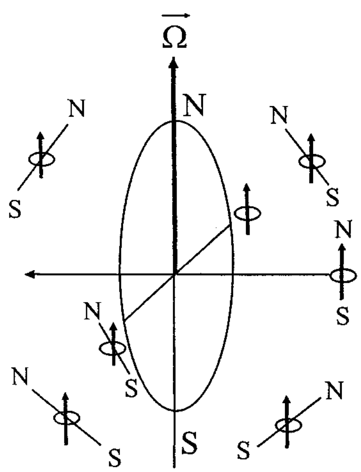
Pero esto querrá decir que ese vector velocidad de rotación instantánea total no tendrá más la dirección del eje principal de inercia (que inicialmente era la dirección de **L** y de Ω), a menos que $\omega_P \ll \Omega$, o sea que $I\Omega^2 \gg M$. Si esa condición no se cumple, el vector rotación total y el vector impulso angular **L** quedarán "desconectados". Este último vector seguirá un movimiento de precesión puro (gobernado por el momento exterior) pero el vector rotación total y, con él, el eje del giróscopo tendrán superimpuesto un movimiento muy complicado llamado movimiento de *nutación* (gobernado por la relación (5.16).) Si la fuerza aplicada es muy grande, $\omega_P > \Omega$ y, efectivamente, el eje del giróscopo se inclinará hacia abajo ("gana" la fuerza).



Lo importante en la relación (5.27) es que para un dado momento exterior **M**, la rotación de precesión (o sea, el efecto dinámico de ese momento sobre el giróscopo) puede ser disminuida arbitrariamente, con tal de aumentar suficientemente la velocidad de rotación Ω. Obsérvese que la relación (5.27) representa una propiedad verdaderamente notable: describe uno de los poquísimos ejemplos en física en el que el efecto dinámico de una acción exterior sobre un sistema (el giróscopo) puede ser reducido a cero, con sólo dar al sistema un adecuado estado *cinemático* inicial (rotación suficientemente grande). En la práctica, la velocidad de rotación elevada puede ser mantenida por un motor eléctrico, o, mejor, una turbina de aire comprimido. Gracias a la relación (5.27) será entonces posible reducir a un mínimo la influencia de momentos exteriores como los de rozamiento en los ejes de las armazones del giróscopo. Es decir, un giróscopo realmente mantendrá su eje orientado en la misma dirección por un tiempo largo (tanto más largo cuanto mayor sea Ω y menor, entonces, la influencia de los momentos de frotamiento).



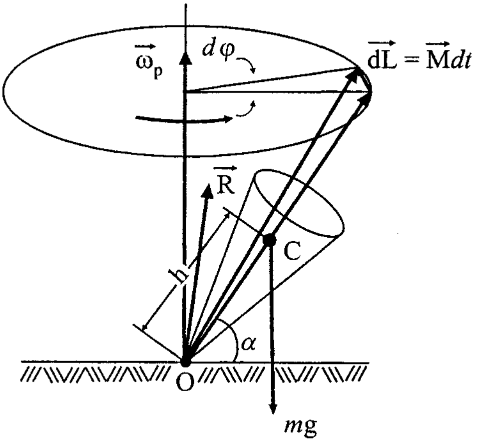
Por esta razón se usa el giróscopo como instrumento de orientación terrestre (hoy día, el sistema satelital "GPS" es mucho más preciso). Efectivamente, si disponemos el eje del giróscopo paralelo el eje de rotación de la Tierra (*girocompás*), siempre se mantendrá en ese dirección, cualquiera sea la posición del giróscopo en la Tierra. La proyección de la dirección del eje sobre el plano horizontal dará, entonces, la dirección cardinal Sur-Norte. En los polos, el girocompás no sirve como instrumento de orientación, pues su eje será perpendicular al plano horizontal. Obsérvese que si el giróscopo no tiene la dirección del eje de rotación de la Tierra, el eje del giróscopo girará en 24 horas describiendo un cono, debido a la rotación de la Tierra, cuando permanece en un mismo lugar geográfico.



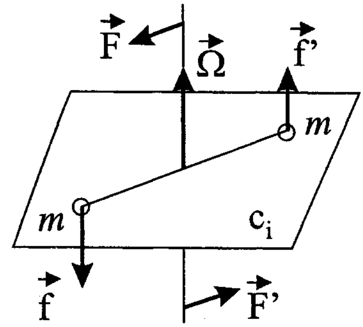
Obsérvese que la "clave" de un girocompás está verdaderamente en la relación (5.27). Efectivamente, en el caso ideal de una suspensión cardánica absolutamente *sin* frotamiento, aún un cuerpo en *reposo*, sin rotación alguna, seguiría manteniendo su eje en la misma orientación (no hay momentos exteriores; entonces no puede haber giros del eje). Esto por supuesto no ocurre en la práctica, porque el frotamiento, por pequeño que sea, siempre será suficiente como para que el eje varíe de orientación a medida que se desplace el armazón exterior. En cambio, cuando el cuerpo central gira, el desplazamiento de su eje por efecto del frotamiento puede ser reducido casi a cero aumentando suficientemente el valor de Ω.

El movimiento de un trompo es otro caso característico del movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo. En este caso, el punto fijo no es el centro de masa, sino otro punto O del eje de figura. Aquí, nuevamente, el momento exterior del peso respecto del punto fijo O causará una variación del vector impulso angular perpendicular al plano determinado por el peso y el punto O. Esto significa que el vector **L** girará en precesión

alrededor de la vertical: el trompo no "cae", sino que inicia un movimiento de precesión, con una velocidad angular dada por $\omega_P = dL/L\cos\alpha\, dt = mgh/I\Omega$. Nuevamente, sólo si $\omega_p \ll \Omega$ habrá un movimiento de precesión puro. Si esa condición no se cumple, el eje del trompo efectuará un complejo movimiento combinado de precesión y nutación. Obsérvese que la velocidad de precesión de un trompo es independiente de la inclinación α.

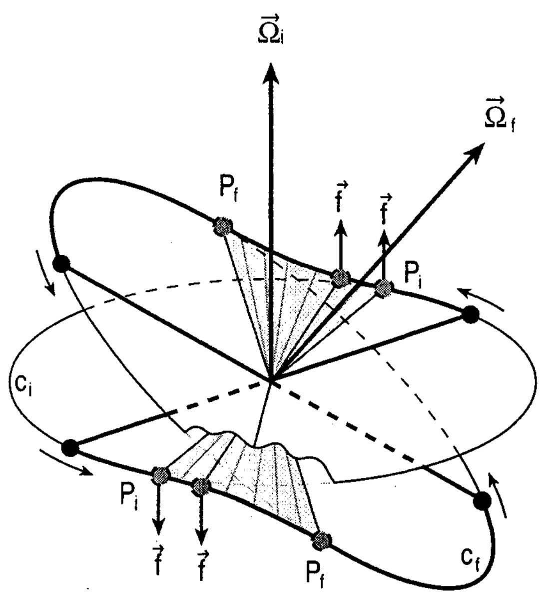


Podemos mostrar intuitivamente el porqué de ese comportamiento "antiintuitivo" del trompo. Consideremos el ejemplo ya usado oportunamente de dos masas puntuales (iguales) unidas por una barra rígida de masa despreciable, que rota libre de fuerzas y momentos alrededor de un eje principal de inercia. Las dos masas describen una órbita circular c_i. Durante un intervalo de tiempo corto Δt, actúa un par de fuerzas **F** y **F'** sobre el eje, como en la figura a).



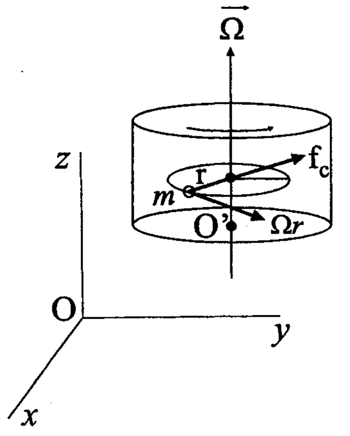
a)

Ello es equivalente a un par de fuerzas **f** y **f'** sobre las masas, transmitido a través del eje y de la barra rígida. En la figura b) se observa el plano del movimiento inicial c_i (los vectores $\mathbf{\Omega}_i$ y $\mathbf{L}_i$ son perpendiculares a c_i). Cuando las masas están en P_i y P'_i, comienza la acción del par **f**, **f'**. Cada masa se desviará en la forma indicada por el dibujo, bajo la acción de esas fuerzas (se mueven sobre una superficie esférica, impuesta por la condición de rigidez). Alcanzados los puntos P_f y P'_f cesa la acción del par y el movimiento vuelve a ser libre. A partir de ese instante las masas se mueven sobre la circunferencia c_f, tangente a la velocidad en P_f y P'_f. Observando atentamente el dibujo es fácil reconocer que el plano de ese movimiento final tiene una inclinación respecto del inicial que no está en la dirección del par, sino que es *normal* a él.



b)

h) Sistemas no-inerciales en rotación

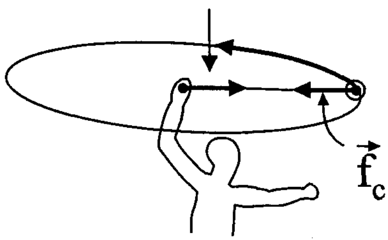


Consideremos el caso en que el movimiento de un sistema O' respecto de un sistema inercial O sea de una rotación pura uniforme (calesita). Mantener un objeto en reposo respecto del observador en O' significa, para el observador inercial O, mantenerlo en movimiento circular uniforme de aceleración (2.8a) y (2.13) $a_c = v^2/r = \Omega^2 r$. Para ello hará falta ejercer una fuerza:

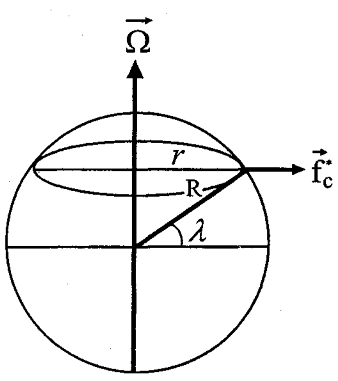
$$\mathbf{f}_c = -m\Omega^2\mathbf{r}$$

dirigida hacia el centro de rotación. Esto quiero decir que el observador O' debe ejercer una fuerza $\mathbf{f}_c$ sobre todo cuerpo libre de fuerzas exteriores, para mantenerlo en reposo. No valen para él, entonces, las ecuaciones de Newton: se trata, nuevamente de un sistema no-inercial. Si el observador fijo a ese sistema quiere mantener a toda costa la validez de las ecuaciones de Newton, debe postular la existencia de una fuerza inercial $\mathbf{f}_c^* = -\mathbf{f}_c$, que actúe sobre todos los cuerpos y a la cual es necesario equilibrar, para mantener un cuerpo en reposo respecto de su sistema. Esa fuerza inercial (Cap. 3, j), de dirección radial,

$$\mathbf{f}_c^* = m\Omega^2\mathbf{r} \qquad (5.28)$$



se denomina fuerza *centrífuga*. Para el observador sobre la "calesita" todo sucede como si sobre cada cuerpo actuase una fuerza $\mathbf{f}_c^*$ (5.28). Para el observador inercial, esa fuerza no existe. Lamentablemente, a veces se presenta a la "fuerza centrífuga" como si fuera una fuerza ordinaria (de interacción, independiente del sistema de referencia). Esto es un grave error desde el punto de vista conceptual. La definición "usual" de fuerza centrífuga, como "reacción" sobre la mano en el caso del movimiento circular uniforme de un objeto revoloteado con una cuerda, es conceptualmente falsa. Es cierto que esta fuerza es igual y del mismo sentido que la "verdadera" fuerza centrífuga; pero la fuerza sobre la mano es una fuerza de interacción genuina (la interacción elástica entre la piedra y el hombre, provista por la cuerda), que es independiente del sistema de coordenadas: existe tanto para un observador en reposo como para un observador que gira con el objeto revoloteado.



La fuerza centrífuga tiene efecto apreciable en el movimiento de la Tierra. Su valor es:

$$f_c^* = m\Omega^2 r = m\Omega^2 R\cos\lambda$$

donde λ es la latitud geográfica del lugar. Esta fuerza se suma a la fuerza de atracción gravitatoria, dando una desviación de la aceleración total de la gravedad de su valor normal. Recuérdese que este fuerza centrífuga sólo existe para el observador que rota con la Tierra.

La "ausencia de gravedad" en un satélite artificial puede ser explicada con la fuerza centrífuga en forma similar a la ausencia de la gravedad en un ascensor en caída libre (Cap. 3.k). Efectivamente, tomando un satélite en órbita circular, de velocidad dada por la (4.15), $v_0 = \sqrt{\gamma M/r}$, y considerando un sistema de coordenadas que gira alrededor de la Tierra con el satélite (o sea, para el cual el satélite permanece en reposo), la fuerza resultante sobre un objeto de masa m dentro del satélite será, según la dirección del radio vector:

$$f_{\text{grav}} + f_c^* = -\frac{\gamma Mm}{r^2} + m\Omega^2 r = -\frac{\gamma Mm}{r^2} + \frac{mv_0^2}{r} = 0$$

O sea, un cuerpo en el interior de un satélite se comporta como libre de fuerzas, visto por un astronauta empeñado en usar las ecuaciones de Newton.

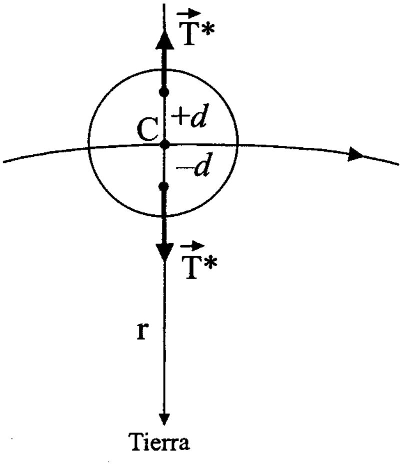
Obsérvese otro detalle muy importante. En ese sistema O', que rota con el satélite, la suma $\mathbf{f}_c + \mathbf{f}_c^*$ sólo es cero para objetos que están exactamente sobre la órbita del satélite (de su centro de masa). Para un cuerpo de masa m inicialmente en reposo respecto del satélite, que está un poco más cercano o más lejano de la Tierra, la suma $\mathbf{f}_c + \mathbf{f}_c^*$ no es más nula. En particular, si d es la distancia a que se encuentra el cuerpo de la trayectoria del centro de masa del satélite, tendremos

$$T^* = f_g + f_c^* = -\frac{\gamma Mm}{(r \pm d)^2} + m\Omega^2 (r \pm d) =$$

$$= -\frac{\gamma Mm}{(r \pm d)^2} + m\frac{\gamma M}{r^3}(r \pm d) \cong \pm \frac{\gamma Mm}{r^2}\frac{3d}{r} = \pm f_g \frac{3d}{r}$$

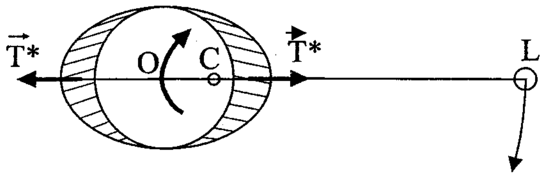
si $d << r$. El vector $\mathbf{T}^*$ de dirección radial, y sentido que se aleja de la órbita del centro de masa del satélite, dado por

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_c^* \qquad (5.29)$$

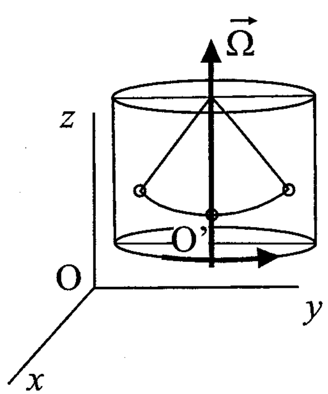


también es una fuerza inercial que se llama *fuerza tidal*. Efectivamente, para el observador en el sistema O' (astronauta) todo sucede como si sobre cualquier cuerpo en su cabina, ubicado fuera de la órbita del centro de masa del satélite, actuase una fuerza $\mathbf{T}^*$ que tiende a alejar el cuerpo de la órbita en cuestión. La intensidad de la fuerza (5.29) es extremadamente pequeña para el caso de un satélite artificial. Efectivamente, para un astronauta (80 Kg) que se aleja 1 Km de su nave (que orbita a 300 Km s.n.m),

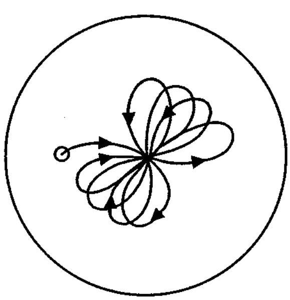
hacia la Tierra, o en dirección opuesta, la fuerza tidal (5.29) es de sólo 11,3 gramos fuerza (¡pero suficiente para que el astronauta tenga que estar atado con una cuerda a su vehículo, o disponer de un aparato de propulsión!). En el caso del movimiento de la Tierra alrededor del centro de masa común con la Luna, aparecen fuerzas tidales apreciables: son las causantes de las *mareas*. Tal como en el satélite artificial, aparece en la Tierra una fuerza $\mathbf{T}^*$ en la dirección Tierra-Luna (aproximadamente), que tiende a alejar del centro de la Tierra las masas de agua en *ambos* hemisferios. Por ello las mareas tienen un período aproximado de sólo 12 horas. En verdad, en este caso el problema es muy complicado, por cuanto no vale más la aproximación $d \ll r$: ¡el centro de masa Tierra-Luna está dentro de la Tierra! También es ilustrativo describir el fenómeno de las mareas desde un sistema inercial, para el cual no existen las fuerzas tidales. Para este sistema, la porción de agua que está más cerca de la Luna, y aquella que esté más lejos, tienen, al estar en reposo respecto de la Tierra, una velocidad *incorrecta* para ejecutar el mismo movimiento que el centro de la Tierra alrededor del centro de masa Tierra-Luna.

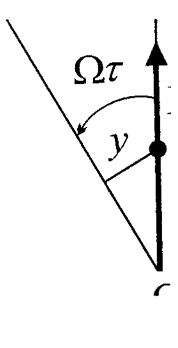


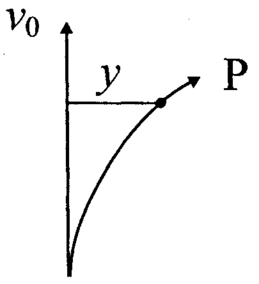
En particular, la porción que está más cerca tiende a seguir una órbita elíptica más curvada (que se acerca a la Luna). La masa de agua en la cara opuesta, en cambio, tiende a ir, con esa velocidad, por una órbita elíptica menos curvada (alejándose de la Luna).



En un sistema de rotación uniforme la fuerza centrífuga no es la única fuerza inercial. Consideremos un péndulo suspendido del eje de rotación. El observador inercial verá oscilar el péndulo en un plano fijo. Para el observador rotante, en cambio, el plano de ese péndulo gira con una rotación inversa $-\Omega$. El péndulo describirá, entonces, una trayectoria complicada en forma de roseta. Para el observador en O' todo sucede como si actuara una fuerza (además del peso y la tensión del hilo), responsable de ese movimiento complicado. Como en ese lugar (eje) la fuerza centrífuga es nula ($r = 0$), debe haber otra fuerza inercial responsable de ello. Vamos a calcular el valor de esa fuerza inercial adicional. Para ello consideramos un móvil (por ejemplo, la masa del péndulo) que en un instante dado pasa por el punto O', centro de rotación, con una velocidad **v**. Obsérvese este movimiento respecto del sistema inercial fijo. La masa, estando libre de fuerzas, seguirá con su movimiento en la misma dirección y, al cabo de un tiempo τ, que supondremos pequeño, se encuentra en P. Pero, durante ese tiempo, los puntos del sistema rotante (calesita) que estuvieron sobre el radio vector que tenía la dirección de **v** han girado en el ángulo $\Omega\tau$. Para un observador fijo al sistema rotante, el móvil se desplazó hacia la derecha del radiovector, en una distancia $y = \mathrm{O'P}\,\mathrm{sen}\Omega\tau = v\tau\,\mathrm{sen}\Omega\tau$. Si $\tau \to 0$, $\mathrm{sen}\Omega\tau \approx \Omega\tau$, o sea, $y = v\Omega\tau^2$. Derivando dos veces respecto del tiempo, obtenemos la aceleración responsable de ese movimiento "torcido" respecto del sistema rotante:







$a = d^2y/dt^2 = 2v\Omega$. Esto se puede escribir vectorialmente $\mathbf{a} = 2\mathbf{v} \times \Omega$, teniendo en cuenta que en este caso **v** y Ω son perpendiculares entre sí. Esto se ha deducido para un punto sobre el eje de rotación. Si ahora consideramos el movimiento de un cuerpo en un punto distinto del eje, se puede demostrar que el observador rotante sigue viendo una aceleración $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_r \times \Omega$, donde $\mathbf{v}_r$ es ahora la velocidad relativa del cuerpo respecto del sistema rotante.

En resumen, para el observador rotante, todo sucede como si además de la fuerza centrífuga actuara una fuerza

$$\mathbf{f}^* = 2m\mathbf{v}_r \times \Omega \qquad (5.30)$$

sobre todo cuerpo en movimiento relativo. Esta fuerza inercial se llama fuerza de *Coriolis* (su descubridor). Obsérvese que sólo actúa sobre cuerpos en movimiento respecto de un sistema en rotación. Se debe a que todo cuerpo en movimiento libre respecto de un sistema en rotación tiene, visto desde éste, una aceleración normal a la trayectoria. Efectivamente, en cada intervalo de tiempo, el sistema rotó un pequeño ángulo; un observador fijo a este sistema ve el asunto a la inversa: para él, "su" sistema está fijo; en cambio, la trayectoria (en "realidad" rectilínea) del móvil giró o se torció en un pequeño ángulo.

La fuerza de Coriolis tiene importancia en muchos fenómenos geofísicos. Por ejemplo, en un centro de alta presión atmosférica en el hemisferio norte, los vientos se desplazan en forma inversa a lo que sucede en el hemisferio sur (ciclones). Ello se debe a que la masa de aire, que inicialmente se desplaza radialmente desde el centro de alta presión hacia afuera, sufre una desviación transversal, que es mutuamente inversa en los dos hemisferios. Con los proyectiles balísticos se observa el mismo efecto: una vez lanzados, "no le llevan el apunte" a la rotación de la Tierra. Por eso, para un observador fijo a ésta, el proyectil se desvía perpendicularmente a su trayectoria, como si sobre él actuara una fuerza de valor dado por la (5.30). También los satélites aparentan estar sujetos a una fuerza transversal a la trayectoria, pues su órbita, vista desde la Tierra rotante, no es elíptica ni plana. Esto se debe a que, estando en su movimiento kepleriano, el satélite sigue una trayectoria en forma independiente de la rotación de la Tierra. Ésta rota "dentro" de la órbita fija. Para un observador fijo a la Tierra, es el plano de la órbita el que aparece rotando en sentido contrario.

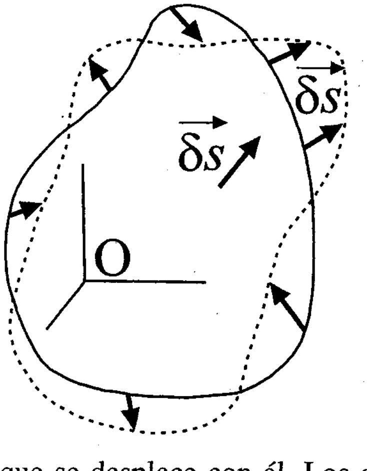
Capítulo 6

Elementos de elasticidad

a) El estado de deformaciones

En el Capítulo 5 hemos estudiado el movimiento, la estática y la dinámica de un cuerpo rígido. Éste es un cuerpo en que la distancia entre dos de sus puntos permanece invariable, cualesquiera sean las fuerzas que sobre él actúan. Hemos llamado la atención acerca de que, en verdad, no existen tales cuerpos, pero que, entre los cuerpos sólidos, muchos se comportan en primera aproximación como rígidos, para el caso de fuerzas no muy grandes.

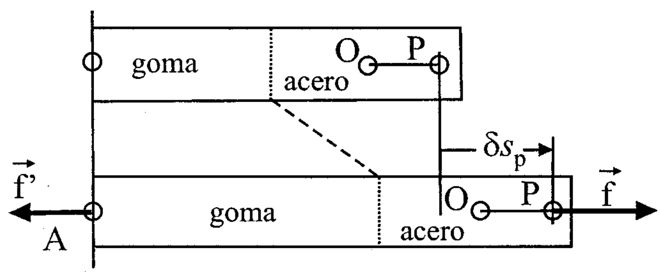
Estudiaremos ahora, en forma elemental, el caso de un cuerpo deformable. Es éste un cuerpo en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera se modifica en función de las fuerzas exteriores. Todos los cuerpos sólidos reales son deformables. Para describir la deformación de un cuerpo sólido real, partiremos de un estado inicial en el que el cuerpo está en reposo y libre de toda fuerza exterior. En ese estado inicial, el cuerpo tendrá una cierta forma, y cada uno de los puntos ocupará una posición dada, señalada por el vector posición **r**. Supongamos que en un instante dado se aplica un sistema de fuerzas exteriores, el cual, en todo momento, está en equilibrio (**R** = 0, **M** = 0). El cuerpo no se trasladará, ni rotará; los únicos desplazamientos posibles para los puntos del cuerpo son los correspondientes al proceso de deformación, que no cumplen con la condición de rigidez (página 164). Se comprueba experimentalmente que, para un sistema de fuerzas en equilibrio dado, la deformación del cuerpo llega en un cortísimo tiempo a un valor límite o asintótico, que corresponde a lo que se llama un estado de *equilibrio de deformación*. Sólo consideraremos aquí el caso de cuerpos deformables en equilibrio de deformación (Elastoestática). En el estado final, cada punto del cuerpo estará desplazado en un valor $\delta \mathbf{s}$ respecto de su posición original en el cuerpo no deformado (escribimos el desplazamiento en forma de diferencial físico, pues, en la mayoría de los cuerpos sólidos reales, este desplazamiento es siempre muy pequeño en relación a las dimensiones del cuerpo).



Siempre podemos elegir un sistema de coordenadas conveniente tal que un punto O cualquiera del cuerpo permanezca fijo ($\delta \mathbf{s}_0 = 0$). Bastará para ello tomar un sistema de coordenadas rígidamente unido a ese punto y que se desplace con él. Los desplazamientos $\delta \mathbf{s}$ de los demás puntos del cuerpo serán, entonces, desplazamientos relativos al punto fijo O. Se dice en ese caso que las deformaciones están referidas al punto fijo en cuestión. Obsérvese nuevamente que cualquier punto del cuerpo puede ser tomado como referencia.

De esta manera, a cada punto del cuerpo inicialmente no deformado está asociado un vector $\delta\mathbf{s}$ que indica el desplazamiento que ese punto habrá de sufrir en la deformación. Por lo tanto, los $\delta\mathbf{s}$ constituyen un campo vectorial. $\delta\mathbf{s}$ se denomina *vector deformación*; es una función del vector posición: $\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Cuando se conoce el vector $\delta\mathbf{s}$ para cada punto del cuerpo, se dice que está determinado el estado de deformación. El problema de la determinación del campo vectorial $\delta\mathbf{s}$ a partir de las fuerzas exteriores y de las propiedades del cuerpo es la meta fundamental de la teoría de la elasticidad. Es, en general, un problema matemáticamente irresoluble en forma analítica; sólo en casos simples, de cuerpos homogéneos y de formas simétricas, se pueden integrar las ecuaciones correspondientes.

Para estudiar el estado de deformación de un cuerpo, es necesario examinar lo que sucede en el entorno infinitesimal de un punto O cualquiera del cuerpo. La razón para ello la obtendremos a través del siguiente ejemplo: tomemos un cuerpo, una barra, que sea "blanda" (goma) en un extremo y "muy dura" (acero) en el otro. Bajo la acción de dos fuerzas como en la figura, la barra se estira. El desplazamiento δs_p de un punto P cercano al extremo "duro", referido al punto distante A, será apreciable. Pero ¿proviene ese desplazamiento de la deformación que tiene lugar en la vecindad de P? Evidentemente no; el desplazamiento de P respecto del punto A es producido fundamentalmente por el estiramiento del cuerpo en el extremo "blando", que está lejos de la región del punto P. Entonces, para estudiar la deformación genuina, local, en la región del punto P, no podemos considerar desplazamientos referidos a puntos distantes, sino que estamos obligados a estudiar cómo se modifica la distancia del punto P a un punto *vecino*, como el O. La variación de la posición "absoluta" de P, tal como viene dada por la distancia $\overline{\mathrm{AP}}$, representa un efecto *suma* de las deformaciones locales en todo el cuerpo.

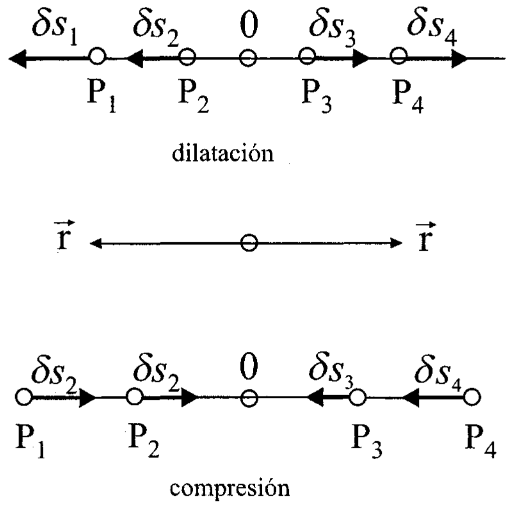


Usaremos un sistema de coordenadas fijo a un punto O, para referir a éste todos los desplazamientos de los demás puntos vecinos del entorno. Si el entorno considerado es suficientemente pequeño, las componentes del vector deformación serán una función lineal de la posición (o sea, de las componentes de **r**). En otras palabras, el vector $\delta\mathbf{s}$ dependerá linealmente del vector **r**.[22] Ello se debe a que, para un **r** suficientemente pequeño,

22. Recuérdese la discusión hecha al pie de la página 171 referida a la relación lineal entre **L** y $\boldsymbol{\Omega}$. La relación lineal entre δs y **r** también está dada por nueve coeficientes (los que ligan las tres componentes de **r** con las tres componentes de **r**), de los cuales sólo seis son independientes. Estos nueve coeficientes son componentes de un único ente, el *tensor deformación*, que representa el estado local de deformaciones, pues nos vincula, en una forma independiente del sistema de coordenadas, los desplazamientos δs con la posición **r** en el entorno de un punto. Los coeficientes dados en las (6.1) y (6.2) son, en realidad, componentes de ese tensor, en un determinado sistema de coordenadas.

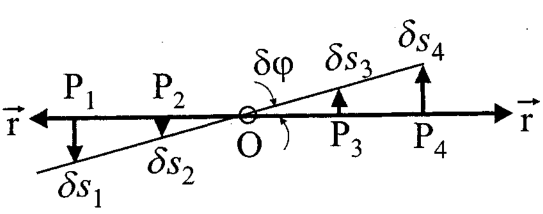
podremos quedarnos con los términos lineales en *x*, *y*, *z* del desarrollo de las funciones $\delta s_x(x,y,z)$, $\delta s_y(x,y,z)$, $\delta s_z(x,y,z)$, que representan las componentes del campo vectorial $\delta \mathbf{s}(\mathbf{r})$. Por lo tanto, **r** es en realidad un infinitésimo. $\delta \mathbf{s}$, por ser una variación pequeña de **r**, será entonces un *infinitésimo de segundo orden* (ver observación sobre "diferenciales físicos" en la página 161).

Obsérvese bien que una relación lineal entre dos vectores no implica que éstos tengan que ser paralelos. Ya se ha dicho al tratar la relación lineal entre el impulso angular y el vector velocidad angular de un cuerpo rígido que habrá sólo tres direcciones en el espacio, perpendiculares entre sí, para las cuales los dos vectores son paralelos. En otras palabras, cuando el desplazamiento $\delta \mathbf{s}$ de un punto del cuerpo deformado es paralelo a su vector posición **r**, esto valdrá para todos los puntos de la recta definida por **r** en el entorno de O. En este caso se dice que los puntos de esta recta tienen una deformación *longitudinal*. Si, además, $\delta \mathbf{s}$ tiene el mismo sentido que **r**, se trata de una *dilatación* pura (las distancias mutuas entre dos puntos de la recta se agrandan). Si $\delta \mathbf{s}$ y **r** tienen sentidos opuestos, tenemos una *compresión* pura (las distancias mutuas se acortan). La cantidad



$$\Delta = \frac{|\delta s_i|}{\mathrm{OP}_i} = \frac{\delta s}{r} \qquad (6.1)$$

se denomina deformación (dilatación o compresión) *relativa* (¡no confundir el símbolo Δ con el que normalmente se usa para designar una variación!). Obsérvese que por la linealidad entre $\delta \mathbf{s}$ y **r**, Δ es la misma para todos los puntos de la recta, en un entorno infinitesimal de O. Es, por lo tanto, un parámetro propio del estado de deformación. A veces, Δ se denomina llanamente "deformación" longitudinal.



Torsión

Si $\delta \mathbf{s}$ es perpendicular a **r** (y ello valdrá para todos los puntos de la recta, en el entorno), la deformación de los puntos de la recta de **r** es *transversal*. Se trata de lo que se llama una *torsión* pura. No debe confundirse esto con una rotación pura, en la que todas las rectas que pasan por O girarían el mismo ángulo $\delta\varphi$ (condición de rigidez, página 164). Obsérvese que las distancias entre dos puntos pertenecientes a una recta en torsión pura permanecen constantes; no así la distancia entre un punto de esa recta y cualquier otro punto del entorno. La deformación relativa correspondiente o *torsión relativa* es

$$\Phi = \frac{|\delta s_i|}{\mathrm{OP}_i} = \frac{\delta s}{r} \qquad (6.2)$$

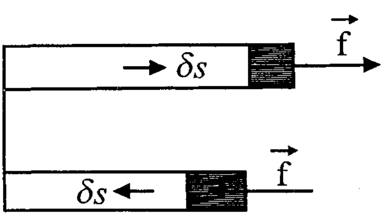
Nuevamente, por la linealidad entre $\delta \mathbf{s}$ y $\mathbf{r}$, este cociente es el mismo para todos los puntos de una recta en el entorno de O. Obsérvese que $\Phi = \mathrm{tg}\,\delta\varphi \approx \delta\varphi$, ángulo infinitesimal que giró la recta en la deformación.

Ya se ha dicho que en el entorno de O en general hay sólo tres direcciones (tres rectas) perpendiculares entre sí, cuyos puntos se encuentran en estado de compresión o dilatación pura. Son las tres *direcciones principales de deformación*. Para cualquier dirección intermedia, la deformación será combinada, pudiéndose descomponer en una deformación longitudinal y una deformación transversal (la recta correspondiente gira y se estira o se comprime).

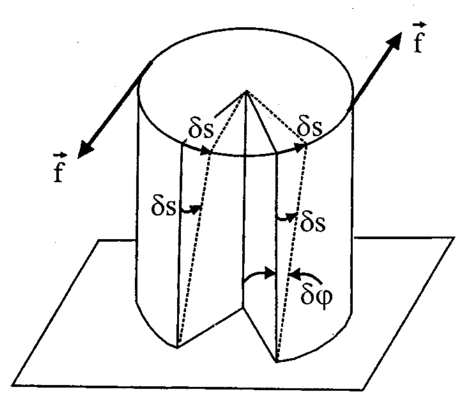
Es muy importante tener bien presente que en las relaciones (6.1) y (6.2) $\mathbf{r}$ es en realidad un infinitesimal (físico) de primer orden que señala la posición de los puntos de un entorno infinitesimal antes de producida la deformación, $\delta \mathbf{s}$ es un infinitesimal de segundo orden (pues representa la variación de $\mathbf{r}$). A veces usaremos para el vector posición de los puntos del entorno la notación diferencial, quedando la (6.1) y la (6.2) en la forma

$$\Delta = \frac{\delta s_{\mathrm{long}}}{\delta r} \quad \text{y} \quad \Phi = \frac{\delta s_{\mathrm{trans}}}{\delta r}$$

respectivamente. Δ y Φ, a su vez, son infinitésimos de primer orden, y son propiedades comunes a todo el entorno.



Analicemos estos tipos elementales de deformación longitudinal y transversal en algunos casos "macroscópicos". Sea una barra larga de sección pequeña con un extremo fijo, a la que se aplica una fuerza como en la figura. En la dirección del eje se producirán deformaciones del tipo longitudinal, dilatación o compresión, según el sentido de la fuerza. Por otra parte, en un cilindro de base fija, deformado bajo la acción de un par de fuerzas como en la figura, las deformaciones serán transversales (torsión).[23]

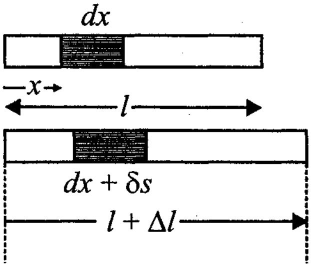


Lo importante es recordar que, en todos los casos, la deformación es un proceso *local*, que ocurre y está definido en el entorno de cada uno de los puntos interiores del cuerpo. De esta manera, el cambio macroscópico de la forma de un cuerpo es el resultado de la acción conjunta o suma de las deformaciones en los entornos de los puntos interiores del cuerpo. Para ilustrar esto mejor, consideremos

23. En ambos casos también hay deformaciones mixtas, pero las más importantes son las indicadas arriba.

nuevamente la barra que se estira. La variación total Δl de su longitud inicial se debe a la suma de lo que se han estirado todos los cilindritos de longitud infinitesimal dx de que se compone la barra. Si llamamos δs a lo que se estiró el cilindrito de bases en x y en x y en $x + dx$ (nuevamente, δs es un infinitésimo de segundo orden, pues representa la variación de dx, longitud infinitesimal del cilindrito), tendremos

$$\Delta l = \Sigma \delta s$$



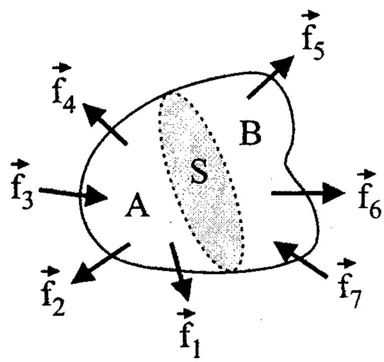
(suma sobre todos los cilindritos, uno a continuación del otro).

Como, a su vez, por (6.1), $\delta s = \Delta\, dx$ (hemos reemplazado r por dx), queda finalmente

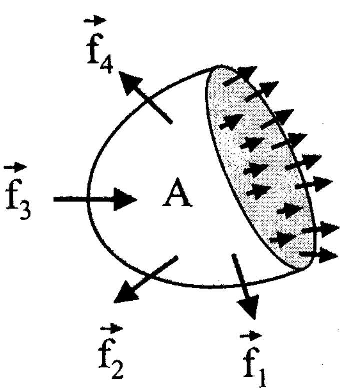
$$\Delta l = \int_0^l \Delta\, dx \qquad (6.3)$$

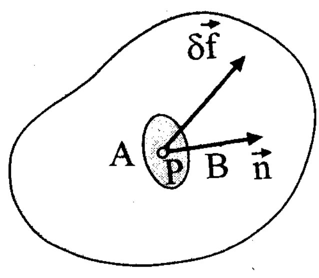
La deformación relativa será en general una función del punto $\Delta = \Delta(x)$. Sólo si Δ es constante, queda la relación $\Delta l = \int_0^l \Delta\, dx = \Delta . l$, o sea, $\Delta l / l = \Delta =$ cte., independiente de la longitud inicial.

b) El estado de tensiones



Analicemos ahora el caso de un cuerpo deformado bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio. Imaginemos una superficie S que corta el cuerpo en dos porciones, A y B. Si separásemos y alejáramos la porción B, la porción A ya no podría estar más en equilibrio, pues no lo estarían las fuerzas que sobre ella actúan. El hecho de que A *está* en equilibrio cuando forma parte de todo el cuerpo A+B quiere decir que sobre la superficie interior S necesariamente debe actuar un sistema de fuerzas superficiales, que mantiene en equilibrio a las fuerzas exteriores sobre la porción A. Esas fuerzas, ejercidas sobre la porción A desde la porción B a través de la superficie S, son las llamadas *fuerzas elásticas*, que tienen su origen en fuerzas de interacción molecular. Esto





vale para cualquier superficie que imaginemos trazada en el interior de un cuerpo deformado: la porción del cuerpo que está de un lado de la superficie ejerce una acción sobre la otra, y viceversa.

Vamos a precisar esto volviendo a tomar dominios infinitesimales: consideremos un punto P interior cualquiera, una superficie infinitesimal, de área δa y normal **n** (*exterior* a la región A del cuerpo que estamos contemplando). Llamemos $\delta\mathbf{f}$ a la fuerza total que las moléculas de la región B ejercen a través de la superficie δa sobre las moléculas de A. Si la superficie es suficientemente pequeña, el módulo de $\delta\mathbf{f}$ será proporcional a δa. Entonces, podemos escribir

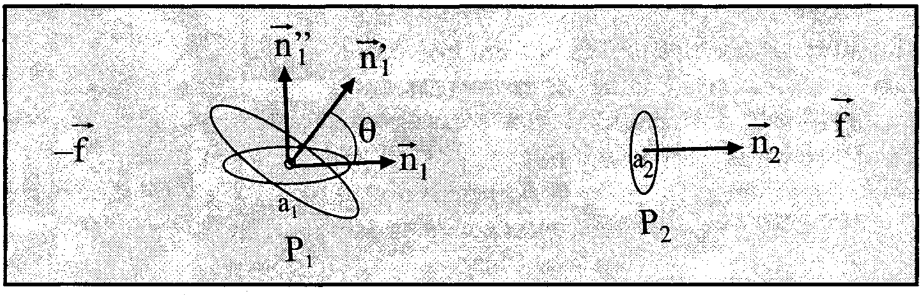
$$\delta\mathbf{f} = \tau \;\delta a$$

donde τ es el vector (independiente de δa):

$$\tau = \lim_{\delta a \to 0} \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta a} \qquad (6.4)$$

τ tiene dimensiones de fuerza por unidad de superficie y se llama *tensión elástica* sobre la superficie en cuestión, en el punto P.

Si bien τ no depende del área δa, es una función de la orientación del elemento de superficie, dada por la normal **n**. A su vez, para un dado **n**, τ variará en general de punto a punto. Esto puede ilustrarse en el ejemplo de una barra larga, de sección muy pequeña variable, sobre la que actúa el sistema de dos fuerzas **f** y – **f** en equilibrio, como en la figura. Sea una sección normal en un punto P_1, de normal $\mathbf{n}_1$.



Sobre la porción de la barra a la izquierda de P_1, actuará evidentemente a través de la superficie de área a_1 una fuerza elástica total **f**. La tensión correspondiente será $\tau = \mathbf{f}/a_1$. Si ahora tomamos una sección inclinada, de normal $\mathbf{n}_1{}'$, formando un ángulo θ con la anterior, tendremos para su área $a_1{}' = a_1\cos\theta$. Como la fuerza total a través de la sección $a_1{}'$ también debe ser **f**, tendremos para la tensión correspondiente:

$$\tau' = \frac{\mathbf{f}_1}{a_1{}'} = \frac{\mathbf{f}_1}{a_1}\cos\theta = \tau_1 \cos\theta$$

La tensión sobre la sección inclinada es, entonces, menor que la tensión sobre la sección normal. La tensión sobre un elemento de superficie horizontal, de normal $\mathbf{n}_1''$, es nula. De esta manera vemos cómo en un mismo punto del cuerpo la tensión τ depende de la orientación del elemento de área. Comparando ahora las tensiones en las secciones normales en dos puntos diferentes P_1 y P_2, tenemos:

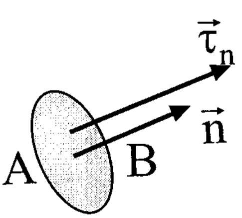
$$\tau_1 = \frac{\mathbf{f}}{a_1} \qquad\qquad \tau_2 = \frac{\mathbf{f}}{a_2}$$

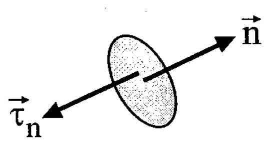
si $a_1 > a_2$, $\tau_1 < \tau_2$. Vemos así que, además, τ dependerá de la posición del punto en el que trazamos el elemento de área.

De esta manera, τ aparece como algo más complicado que un campo vectorial: no basta con decir que a cada punto del cuerpo está asociado un vector τ. Es a cada punto, y en él, a cada dirección de la normal **n**, a los que un vector τ está asociado:

$$\tau = \tau(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \qquad (6.5)$$

En la teoría de la elasticidad, se demuestra que, en cada punto **r**, la relación entre las componentes de τ y las componentes de **n** (sus cosenos directores) es lineal.[24] Cuando se conoce la dependencia $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ se dice que el *estado de tensiones* del cuerpo está determinado.





Sea nuevamente el elemento de área δa con su normal **n**. Si τ es paralelo a **n**, se trata de lo que se denomina una *tensión normal* τ_n. Si, además, τ tiene el mismo sentido que **n,** se trata de una “tensión pura” o “esfuerzo de tensión” (las moléculas de B “tiran” de las moléculas de A a través de la superficie). Si τ tiene sentido opuesto a **n**, tenemos una “compresión pura”, o “esfuerzo de compresión” (las moléculas de B “empujan” a las de A a través de la superficie). Si, finalmente, τ es perpendicular a **n**, o sea, si está contenido en el plano de la superficie, tenemos un “esfuerzo de corte”, o esfuerzo tangencial, τ_c (las moléculas de B “arrastran” a las de A). Para cada punto de un cuerpo en estado de tensión, hay sólo tres direcciones perpendiculares entre sí, para las cuales τ y **n** son paralelos (tensión normal). Son las direcciones principales de tensión.

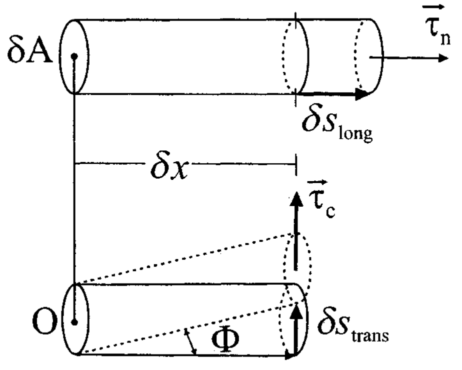
24. ¡Otra vez aparece una relación lineal entre vectores! Los nueve coeficientes que relacionan las tres componentes de **n** con las tres componentes de τ (sólo seis coeficientes son independientes), constituyen las componentes de un único ente, el *tensor de tensiones* (primer tensor en la historia –de ahí el nombre de *tensor*), que representa unívocamente el estado de tensión en un punto del cuerpo deformado.

c) Cuerpos elásticos

Un cuerpo deformable se llama *elástico* cuando existe una relación unívoca y lineal entre el estado de tensión y el estado de deformación, de tal manera que a una tensión nula corresponde deformación nula, a tensiones dobles corresponden deformaciones dobles, etc. Es a partir de esta relación que la teoría de la elasticidad puede lograr su cometido: las fuerzas exteriores determinan las tensiones τ, y éstas, por medio de la relación unívoca entre tensiones y deformaciones, determinan estas últimas. En otras palabras, en un cuerpo elástico, las tensiones son las *causas físicas* de las deformaciones.

Analizaremos esta relación sólo en los casos simples de deformaciones longitudinales y transversales puras. Es evidente que las deformaciones longitudinales estarán ligadas con las tensiones normales, y las deformaciones transversales, con los esfuerzos de corte. En particular, las compresiones puras, con los esfuerzos de compresión; y las dilataciones puras, con los esfuerzos de tensión.[25]

Para estas relaciones valen las siguientes leyes experimentales, válidas sólo en dominios infinitesimales de un cuerpo elástico. Como dominio elemental consideraremos nuevamente un cilindrito de base fija δa y altura δx infinitesimal. Se comprueba experimentalmente que:



1°) Sometido a un esfuerzo normal, el cilindrito sufrirá una deformación longitudinal relativa Δ (6.1), proporcional a τ_n:

$$\Delta = \frac{\delta s_{long}}{\delta x} = \frac{1}{E}\tau_n \qquad (6.6)$$

La constante E se denomina *módulo de elasticidad*, o "módulo de Young". Como para la mayoría de los cuerpos sólidos Δ es muy pequeño, aun para esfuerzos grandes, E tiene un valor muy alto.

2°) Cuando el cilindrito está sometido a un esfuerzo de corte, sufrirá una deformación transversal relativa Φ, proporcional a τ_c:

$$\Phi = \frac{\delta s_{trans}}{\delta x} = \frac{1}{T}\tau_c \qquad (6.7)$$

25. En general, el tensor de tensiones estará relacionado linealmente con el tensor de deformaciones (ver notas al pie de las páginas 198 y 203).

La constante T se denomina *módulo de tensión*; igualmente, suele tener un valor muy alto. Para distintos materiales tenemos, a título de ejemplo (en Kg/mm^2):

	E	T
Aluminio	5,9 x 10^5	2,4 x 10^5
Acero	20,0 x 10^5	7,8 x 10^5
Cobre	9,8 x 10^5	3,9 x 10^5
Plomo	1,5 x 10^5	0,5 x 10^5

Las constantes E y T dependen exclusivamente del cuerpo elástico en cuestión. Salvo en los cuerpos homogéneos, E y T serán en general funciones de la posición:

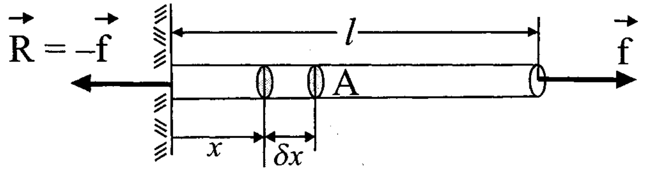
$$E = E(\mathbf{r}) \qquad , \qquad T = T(\mathbf{r})$$

Ésta es la razón por la cual, en el caso general, las relaciones (6.6) y (6.7) sólo se pueden formular para dominios infinitesimales.

Teniendo en cuenta la definición (6.4) de τ, podemos escribir las (6.6) y (6.7) en la forma

$$\Delta = \frac{\delta s_{\text{long}}}{\delta x} = \frac{1}{E}\frac{\delta f_{\text{normal}}}{\delta \text{a}} \qquad \text{y} \qquad \Phi = \frac{\delta s_{\text{trans}}}{\delta x} = \frac{1}{T}\frac{\delta f_{\text{corte}}}{\delta \text{a}}$$

Ellas nos permiten evaluar las deformaciones absolutas δs en función de las fuerzas δf intervinientes.



Calculemos el caso de una varilla larga, homogénea, de sección muy pequeña constante A y longitud inicial l, sometida a la fuerza **f**, como en la figura. Se trata de hallar la variación total de longitud Δl. Consideremos nuevamente el elemento cilíndrico de altura dx, a una distancia x del origen. Ese elementito está bajo la acción de un esfuerzo de tensión $\tau_n = f/A$. Su deformación relativa (dilatación pura) estará dada por (6.5):

$$\Delta = \frac{1}{E}\frac{f}{A}$$

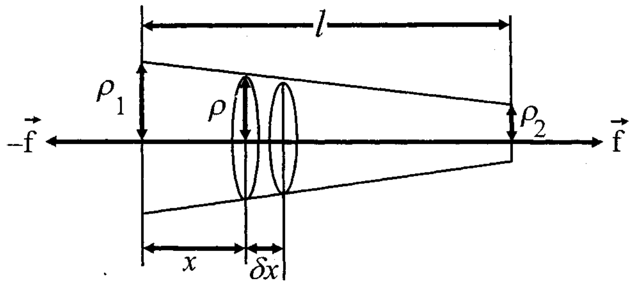
Según lo visto en (6.3), la variación total de la longitud de la varilla se obtiene sumando las variaciones de longitud de cada cilindrito

$$\Delta l = \int_0^l \Delta\, dx = \int_0^l \frac{f}{EA} dx = \frac{f\,l}{EA}$$

Esto lleva a la "Ley de Hooke":

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{f}{EA}$$

Veamos ahora, como ejemplo más convincente del carácter "local" de las (6.6) y (6.7), el caso general de una varilla de sección variable. Por ejemplo, una varilla cuyo radio decrece linealmente de ρ_1 a ρ_2. Ello querrá decir que el radio ρ en un punto x intermedio será (ecuación de una recta que pasa por dos puntos):



$$\rho = \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{l} x$$

La sección en un punto intermedio valdrá $A = \pi \rho^2$. Consideremos nuevamente el cilindrito de altura dx. Ese cilindrito se habrá estirado en un valor dado por (6.1) y (6.6):

$$\delta s = \Delta dx = \frac{f}{EA} dx$$

Teniendo en cuenta la relación entre A, ρ y x, tendremos

$$\delta s = \frac{f\, dx}{\pi E \left(\rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{l} x \right)^2}$$

Esto quiere decir físicamente que los cilindritos que están más cerca del extremo fino se estiran más que los cilindritos cercanos al extremo grueso. Ello se debe a que los primeros están sometidos a un esfuerzo mayor (por ser menor el área A). Para la variación total de longitud, obtenemos:

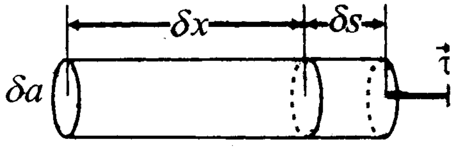
$$\Delta l = \int_0^l \frac{f\, dx}{\pi E \left(\rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{l} x \right)^2}$$

Conviene elegir como variable ρ, y expresar dx en función de $d\rho$:

$$\Delta l = \frac{f}{\pi E}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{-\dfrac{l}{\rho_1-\rho_2}}{\rho^2}\,d\rho = \frac{f}{\pi E}\frac{l}{\rho_1-\rho_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{f}{\pi E}\frac{l}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{f}{E}\frac{l}{\pi\rho_1\rho_2}$$

O sea, una barra de radio variable linealmente se estira lo mismo que una barra de igual longitud y radio $\rho = \sqrt{\rho_1\rho_2}$ (media geométrica).

Estudiaremos finalmente el balance de energía en un cuerpo deformado. Consideremos, para simplificar, sólo el caso de deformaciones longitudinales. Tomemos como siempre un elemento de volumen de longitud inicial δx y sección δa. Supongamos que este elemento se estira por efecto de la deformación, pasando de una longitud δx a un valor final $\delta x + \delta s$. En esa deformación, la tensión normal, responsable de ese estiramiento, realiza trabajo.



Pero en el curso de la deformación, esa tensión τ_n no es constante, sino que va pasando de un valor 0 (estado inicial no deformado) a un valor final τ_n (estado de deformación en equilibrio). Siendo δs un infinitésimo de segundo orden, se puede considerar, con suficiente aproximación, que la tensión pasa *linealmente* de 0 a τ_n durante el proceso de deformación. Su valor medio durante el desplazamiento será, entonces, $\tau_n/2$, y el trabajo total que realiza la *fuerza media* $\tau_n \delta a / 2$ sobre el cilindrito es:

$$\delta W = \frac{\tau_n\,\delta a}{2}\delta s$$

Teniendo en cuenta la (6.1):

$$\delta W = \frac{1}{2}\tau_n \Delta\, \delta x\, \delta a$$

Dividiendo por el volumen $\delta V = \delta x\, \delta a$ del cilindrito, obtenemos la *densidad de energía elástica*:

$$K_l = \frac{\delta W}{\delta V} = \frac{1}{2}\tau_n \Delta \qquad (6.8)$$

Considerando la relación elástica (6.6), tenemos:

$$K_l = \frac{1}{2}\frac{\tau_n^2}{E} = \frac{1}{2}E\,\Delta^2 \qquad (6.9)$$

Es fácil comprobar que para deformaciones transversales, las relaciones anteriores se escribirán:

$$K_t = \frac{1}{2}\tau_c \Phi = \frac{1}{2}\frac{\tau_c^2}{T} = \frac{1}{2}T\,\Phi^2$$

La densidad de energía elástica total será, en definitiva:

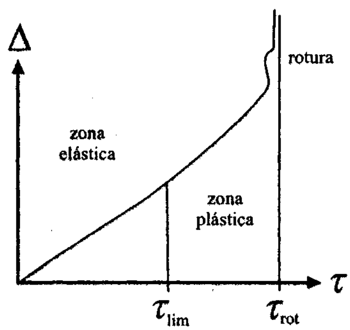
$$K = K_l + K_t = \frac{1}{2}(\tau_n \Delta + \tau_c \Phi) \qquad (6.10)$$

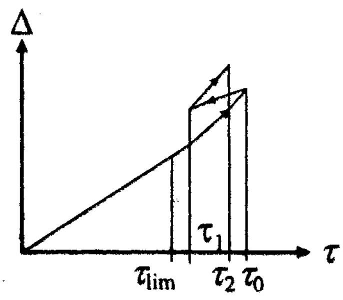
La energía elástica total acumulada en un cuerpo deformado se obtiene sumando (6.10) sobre todos los elementos de volumen:

$$W = \frac{1}{2}\int(\tau_n \Delta + \tau_c \Phi)dV \qquad (6.11)$$

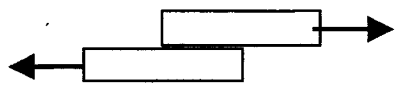
Obsérvese finalmente que, en un cuerpo elástico, la densidad de energía K tiene carácter de *densidad de energía potencial.* Cuando un cuerpo elástico vuelve a su forma original no deformada, la energía W (6.11) es restituida totalmente en forma de trabajo.

Hemos definido un cuerpo elástico como aquel en el que la relación entre las deformaciones y las tensiones es unívoca y lineal. La mayoría de los cuerpos sólidos se comportan como cuerpos elásticos, hasta un cierto límite para las tensiones, a partir del cual la relación entre deformaciones y tensiones ya no es más lineal. Consideremos la relación (6.6) entre la deformación relativa longitudinal y el esfuerzo de tensión. Ella vale sólo si el valor de τ_n se mantiene inferior a un valor límite τ_{lim} más allá del cual la relación deja de ser lineal y unívoca. Este valor τ_{lim} se denomina *límite elástico* de la sustancia en cuestión. La zona $\tau > \tau_{lim}$ se denomina de comportamiento plástico. En ella, la relación entre deformación y tensión no es más unívoca; un cuerpo sometido a un esfuerzo $\tau > \tau_{lim}$ no vuelve más a su forma original cuando cesa la tensión. En particular, si un cuerpo ha sido sometido a una tensión τ_0 (ver dibujo) en la zona plástica, al disminuir la tensión al valor τ_1, la deformación Δ sigue una curva distinta de la original. Lo mismo sucederá si ahora volvemos a aumentar nuevamente la tensión al valor τ_2. Se ve que en la zona plástica no existe más un único valor de Δ para cada valor de τ. El valor particular de Δ dependerá del tratamiento anterior que se haya dado al material. Un fenómeno de esta naturaleza, en el que el valor de una magnitud física depende de la "historia" anterior del sistema, se denomina *histéresis*. Finalmente, más allá de cierto valor τ_{rot}, el cuerpo se rompe; éste es el límite de rotura.



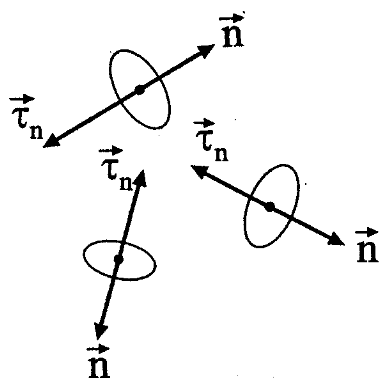


d) Estática de los fluidos no viscosos



Estudiaremos ahora el caso particular de los fluidos no viscosos (líquidos y gases). Por definición, un fluido no viscoso es una sustancia cuyas moléculas no pueden ejercer esfuerzos de corte. En otras palabras, en un fluido de esta naturaleza, dos porciones contiguas pueden desplazarse libremente en forma tangencial; no hay esfuerzos de corte capaces de impedir ese movimiento.

De esta manera, un fluido no viscoso sólo puede estar en equilibrio elástico cuando en su interior actúan tensiones normales de compresión, exclusivamente. En otras palabras, dado un elemento de superficie en un punto interior de un fluido en equilibrio, la tensión elástica será perpendicular y de sentido opuesto a la normal **n**, cualquiera sea la orientación del elemento (las moléculas de un lado de la superficie sólo pueden empujar sobre las del otro lado; no las pueden "tirar",[26] ni "arrastrar" paralelamente a la superficie). Éste es el llamado "Principio de Pascal" (no es ningún "principio", sino mera consecuencia de la definición de fluido no viscoso): la fuerza que un líquido ejerce sobre un elemento de área siempre es normal a él, y dirigida hacia él, cualquiera sea la orientación del mismo.



Dado que τ siempre es de la misma dirección y sentido opuesto a **n**, para los fluidos se puede escribir la relación vectorial (6.5) en la forma más sencilla:

$$\boldsymbol{\tau} = -p(\mathbf{r})\mathbf{n} \qquad (6.12)$$

La cantidad escalar positiva p, que en general dependerá del punto en cuestión, se denomina *presión hidrostática* en el punto **r**. Tiene las mismas dimensiones que una tensión (fuerza/superficie) y valor igual al módulo de la tensión $p = |\tau|$. El estado de tensiones en el interior de un líquido no viscoso, o un gas, estará entonces enteramente descripto por una función escalar, o un *campo escalar*. A partir del campo escalar de presiones, y con la relación (6.4), obtenemos en cada punto, y para cada normal **n**, el valor de la tensión sobre el elemento de superficie en cuestión. La fuerza sobre un elemento de área δa tendrá por módulo

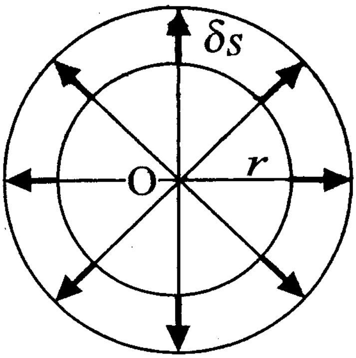
$$|\delta f| = p\,\delta a \qquad (6.13)$$

Respecto de las deformaciones de un fluido en equilibrio, sólo las puede haber longitudinales (compresión-dilatación). No puede haber torsión en el seno de un líquido en

26. Esto no es rigurosamente cierto para líquidos: la tensión superficial es un ejemplo de interacción molecular atractiva.

equilibrio, porque no pueden actuar los esfuerzos de corte, responsables de la misma. Se puede demostrar que todos los puntos que están sobre una esferita de radio r (infinitesimal) con centro en el punto (arbitrario) fijo O, tienen el mismo δs cuando se produce la deformación. Si no fuera así, necesariamente habría una región de puntos con desplazamientos transversales. Consideremos la variación de volumen de esa esfera en la deformación: $\Delta V = 4\pi r^2 \delta s$. Para la variación relativa tenemos:

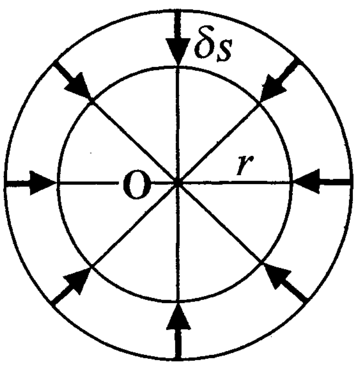
$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \delta s}{4/3\pi r^3} = 3\frac{\delta s}{r} = 3\Delta$$



Como Δ es una característica de la deformación que en este caso tiene el mismo valor para cualquier recta en el entorno de O, Θ será una magnitud característica y única de la deformación en un punto interior de un fluido no viscoso. Θ *relativa de volumen*, y se la utiliza para describir el estado de deformaciones de un fluido (Θ es más fácil de medir que Δ). Θ es un campo escalar, pues en general dependerá del punto en cuestión: $\Theta = \Theta(\mathbf{r})$.

De la relación elástica (6.6) deducimos, para el caso de fluidos no viscosos, la relación escalar:

$$\Theta = \frac{3}{E} p = \kappa p \qquad (6.14)$$

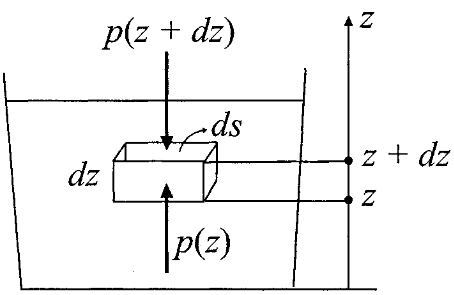


La constante del material κ se *denomina compresibilidad* del fluido. En resumen, en el estudio elástico de un fluido estático intervienen el campo escalar p (que representa el estado de tensiones), el campo escalar Θ (que representa el estado de deformaciones), y la constante del material κ que relaciona ambos entre sí.[27] Para líquidos, κ suele ser muy pequeño. Un líquido ideal es aquel para el cual $\kappa = 0$ (incompresible).

Consideremos el caso de un líquido en equilibrio, sometido a la acción de la gravedad. Estudiemos el equilibrio de un elemento de volumen como el de la figura. Si dS es el área horizontal, las fuerzas sobre el elemento en la dirección z (vertical) serán $p(z)dS$, $-p(z+dz)dS$ y $-\rho\, dz\, dS\, g$ (peso). Estando estas fuerzas en equilibrio, tendremos:

$$p(z) - p(z+dz) - \rho g\, dz = 0$$

27. Por lo tanto, en fluidos no viscosos la relación lineal entre el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones se reduce a una relación lineal entre escalares (ver notas al pie de las páginas 198 y 203).



O sea:

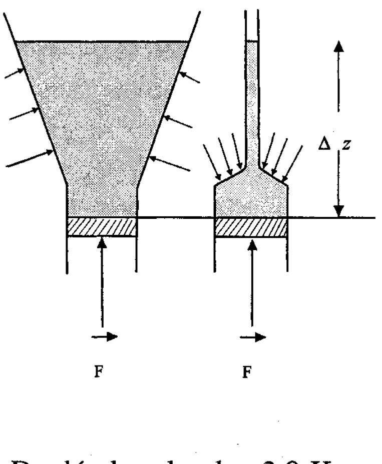
$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g \qquad (6.15)$$

Por otra parte, considerando dos caras laterales opuestas, es fácil ver que las presiones deben ser las mismas para mantener el equilibrio. La presión depende entonces solamente de la altura z. Si ρ es constante, esta ecuación se puede integrar entre dos valores de z, uno de los cuales puede ser z_0, nivel de la superficie:

$$p(z) = p(z_0) + \rho\, g\, (z_0 - z)$$

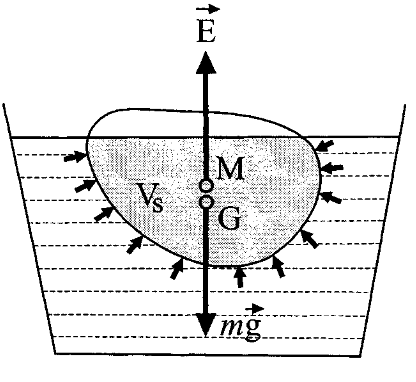
La presión aumenta linealmente desde la superficie a medida que se penetra en el seno del líquido. Para el caso del agua, la presión aumenta por cada metro de profundidad, en $\Delta p = r\, g\, 100\,\text{cm} = 100$ gr fuerza/cm^2. O sea, cada 10 m de profundidad, la presión aumenta una atmósfera (1 atm = 1 Kg/cm^2).

El hecho de que la presión en el interior de un líquido sólo dependa del nivel (y no de factores geométricos, como la forma del recipiente, etc.) conduce a la clásica "paradoja hidrostática". Sea un cilindro con un pistón de área S. En un caso le sobreponemos un recipiente tipo embudo; en el otro, un tubito estrecho. En ambos casos llenamos el recipiente con líquido hasta el mismo nivel Δz sobre el pistón. En el recipiente de la izquierda debemos echar, por ejemplo, 10 Kg de agua; si el área es 100 cm^2 y $\Delta z = 30$ cm, la fuerza para mantener en equilibrio el pistón es de $F = \rho\, g\, \Delta z = 3$ Kg fuerza. Pregunta: ¿dónde "quedan" los 7 Kg fuerza del peso del agua restantes? Evidentemente son absorbidos por las fuerzas de reacción en las paredes del embudo cuya resultante deberá ser exactamente de 7 Kg dirigida hacia arriba. En el caso del tubo estrecho, necesitamos echar, por ejemplo, sólo 100 g de agua; sin embargo, la fuerza sobre el pistón es de 3 Kg.



¿De dónde salen los 2,9 Kg restantes? Nuevamente, provienen de la resultante de la reacción de las paredes del recipiente, que, en este caso, estará dirigida hacia abajo.

Consideremos ahora un cuerpo que flota en un líquido, en reposo. Ello querrá decir que el sistema de fuerzas que sobre él actúa está en equilibrio. El sistema de fuerzas está compuesto por dos sistemas parciales:



1) El sistema de fuerzas gravitatorias, aplicadas a cada elemento de volumen. Ya hemos visto (5.23) que el sistema equivalente es una única fuerza $m\mathbf{g}$ aplicada el centro de gravedad G del cuerpo.

2) Un sistema de fuerzas superficiales, que actúan normalmente a cada elemento de área de la superficie S de contacto con el líquido, y que provienen de la tensión elástica (presión) en el mismo.

Hallaremos para esas fuerzas superficiales un sistema equivalente, dado por una única fuerza, llamada "empuje". Este sistema equivalente se obtiene fácilmente a partir de la siguiente consideración: supongamos que quitamos el cuerpo flotante, y que reemplazamos el volumen sumergido V_s (parte rayada del dibujo) con el líquido en cuestión. Dado que el sistema resultante estará en equilibrio, y como las tensiones serán las mismas que en el caso anterior (puesto que la presión en un punto de la superficie S sólo depende de la posición z y no de "lo que hay detrás" de S), el peso de la porción rellenada de líquido debe mantener el equilibrio con las fuerzas superficiales. Como ese peso tiene valor $\rho V_s g$, estando aplicado en un punto M, centro de gravedad de la porción de líquido que ocupa V_s, el empuje o fuerza equivalente al sistema de tensiones sobre la superficie S deberá estar aplicado en ese punto M y tener un valor:

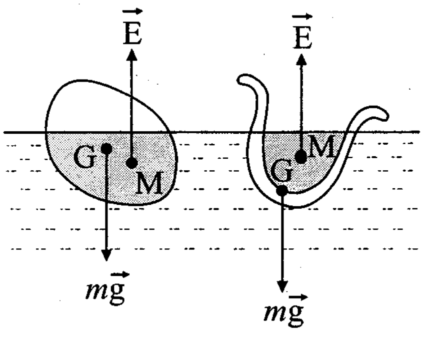
$$\mathbf{E} = -\rho V_s \mathbf{g} \qquad (6.16)$$

El punto M, centro de gravedad de la porción del líquido que reemplaza el volumen sumergido del cuerpo, se llama *metacentro*.

En un cuerpo homogéneo de densidad ρ_c constante, totalmente sumergido, el metacentro y el centro de gravedad coinciden. Si en un cuerpo totalmente sumergido se cumple $|E| > mg$, el cuerpo subirá a la superficie (flotará). Esta condición se traduce en $\rho V g > mg$, donde V es el volumen total del cuerpo. O sea, debe cumplirse la condición para las densidades:

$$\rho > \frac{m}{V} = \overline{\rho_c}$$

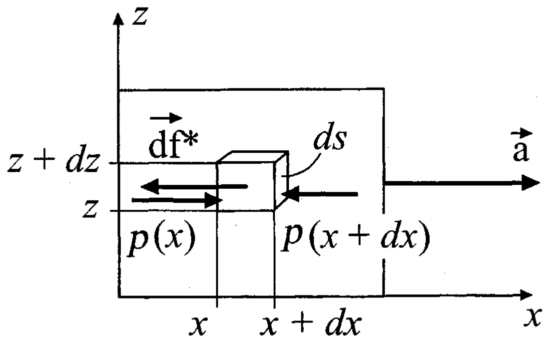
$\overline{\rho_c}$ es la densidad media del cuerpo. La condición para que un cuerpo flote en un líquido de densidad ρ es, entonces, que su densidad media sea menor que la del líquido.



La condición de equilibrio para un cuerpo que flota parcialmente sumergido es que el centro de masa y el metacentro estén sobre la vertical y que $E = mg$. Si el metacentro está por debajo del centro de masa, el equilibrio será inestable, por cuanto una pequeña desviación hará aparecer un par de fuerzas $\mathbf{E}, m\mathbf{g}$ que tenderá a desviar aún más al cuerpo. El equilibrio estable se obtiene sólo si M está por encima de G: en un pequeño desplazamiento, el par $\mathbf{E}, m\mathbf{g}$ tenderá a volver el cuerpo a su posición

inicial. Obsérvese finalmente que el metacentro no es un punto fijo al cuerpo, sino que depende de la forma de la porción sumergida.

Todas estas consideraciones valen también para el caso de cuerpos "sumergidos" en un gas. El empuje que un cuerpo recibe en el aire es $\mathbf{E} = -\rho_{\text{aire}} V \mathbf{g}$. La condición para que un globo de volumen *V*, inflado con un gas de densidad ρ_g, remonte con una carga total *P* estará dada por $\rho_{\text{aire}} V g > P + \rho_g V g$, donde $\rho_g V g$ es el peso del gas. O sea, se lo debe inflar a un volumen que cumpla la condición $V > P/(\rho_a - \rho_g)g$. Obsérvese que sólo podrá remontar si se lo infla con un gas cuya densidad sea menor que la del aire (hidrógeno, helio, etc.).



Consideremos ahora un recipiente cerrado, totalmente lleno de líquido en equilibrio, que está en un sistema no-inercial, que se mueve con movimiento uniformemente acelerado (capítulo 3, j). Estudiemos nuevamente el equilibrio de un pequeño volumen (ver figura). Para la dirección vertical *z*, obtenemos una relación idéntica a la (6.15); según la dirección horizontal *x*, dirigida en el sentido de la aceleración **a**, las fuerzas actuantes serán ahora: $p(x)dS$, $-p(x+dx)\,dS$ y la fuerza inercial (3.24) $df^* = -\rho\, dS\, dx\, a$. Por lo tanto, por la condición de equilibrio, tenemos, para puntos de un mismo valor de *z*:

$$p(x) - p(x + dx) - \rho\, a\, dx = 0$$

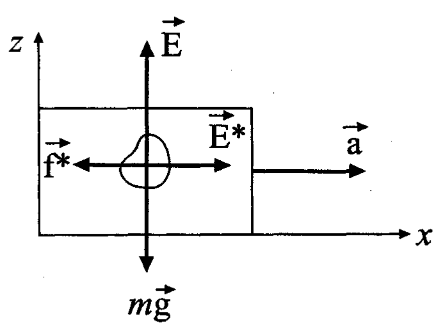
O sea

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a$$

Hemos escrito una derivada parcial, por cuanto la presión depende ahora de las dos variables *z* y *x*. Integrando y teniendo en cuenta la (6.15), obtenemos

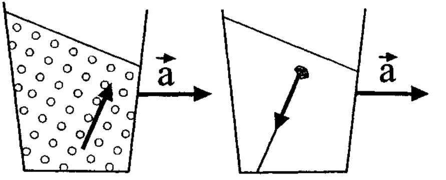
$$p = p_0 - g\,(z - z_0) - a\,(x - x_0)$$

p_0 es la presión en el punto x_0, z_0. Obsérvese que la presión no sólo aumenta hacia abajo, sino también en dirección opuesta a la aceleración **a** del recinto.

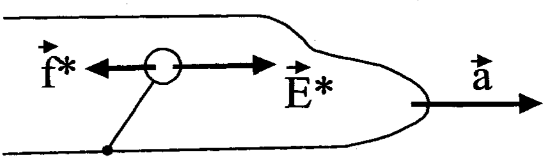


Si ahora tenemos un cuerpo totalmente sumergido en el seno del líquido, en ese sistema no-inercial, actuarán sobre él las siguientes fuerzas. En la dirección de *z*: su peso y el empuje correspondiente dado por la (6.16); en la dirección de la aceleración, actuará la fuerza inercial $\mathbf{f}^* = -m\mathbf{a}$ y un empuje inercial que se calcula análogamente al caso de la (6.16) y que vale $\mathbf{E} = \rho V\mathbf{a}$.

Proviene físicamente del hecho de que la presión en el líquido que está a la izquierda del cuerpo (en sentido opuesto a **a**) es mayor que la presión del líquido a la derecha, dando una resultante neta del mismo sentido que la aceleración **a**. Obsérvese que si el empuje gravitatorio $\mathbf{E} = -\rho V\mathbf{g}$ es mayor que el peso de cuerpo ($\rho_c < \rho$, cuerpo que flota), también el empuje inercial **E*** será mayor que la fuerza **f*** (equivalencia entre campo gravitatorio y sistema no-inercial, página 104). Eso querrá decir que un cuerpo que flota se desplazará dentro del líquido en la *misma* dirección que la aceleración del recinto (contrariamente a lo que se podría esperar intuitivamente). Por ejemplo, las burbujas que ascienden en un vaso de cerveza se inclinarán en la misma dirección en la que es acelerado el vaso. En cambio, un cuerpo que no flota ($E < \rho Vg$, $\rho_c > \rho$), se desplazará en dirección contraria a la aceleración **a** ("gana" la fuerza inercial). Por ejemplo, una bolita arrojada en un vaso de agua acelerado "queda atrás", o sea, se desvía en dirección contraria a la aceleración.

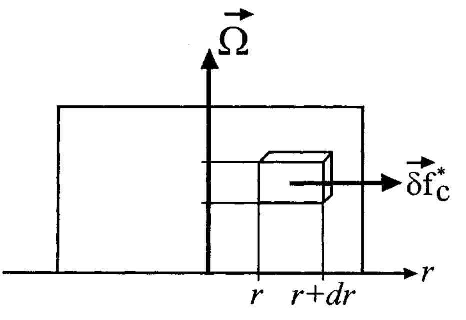


Otro ejemplo clásico es el de un globo en un avión que acelera durante el despegue: en lugar de quedar "atrás", se inclina hacia adelante, en la dirección de movimiento (de la aceleración). Nuevamente, esto no es "antiintuitivo", sino que se explica teniendo en cuenta que, durante la aceleración, la presión en la cabina es mayor en la parte de atrás que en la parte delantera, dando así al globo un empuje hacia adelante.



En un ascensor en caída libre, o en la cabina de un satélite (en que **a** = – **g**), el empuje inercial anula el empuje gravitatorio, tal como la fuerza inercial anula la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, en un satélite las burbujas en un vaso de cerveza no ascienden; quedan donde se forman. Igualmente, un astronauta nunca podría mantener encendida una vela (en reposo): como no hay empuje, los gases de combustión calientes no ascenderán y terminarán por ahogar la llama.

Para finalizar, consideremos el caso de un recipiente con líquido en equilibrio en un sistema no-inercial, como el de una "calesita" con rotación uniforme. Supongamos que el recipiente es cerrado y que está totalmente lleno de líquido. Consideremos nuevamente el balance de fuerzas sobre un paralelepípedo elemental. Ahora habrá que tener en cuenta la acción de la fuerza inercial centrífuga (5.28). Según el radio **r**, actúan las fuerzas en equilibrio:



$$p(r)dS + \Omega^2 r\rho\, dS\, dr - p(r+dr)\ dS = 0$$

O sea

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \Omega^2 \rho r$$

con la integral (para ρ = cte.):

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\Omega^2 \rho \left(r^2 - r_0^2\right)$$

La presión aumenta cuadráticamente a medida que nos alejamos del eje de rotación. Esta expresión vale para los puntos de un mismo nivel z. Para esta dirección vertical z y para un valor dado de r, obtenemos una ecuación como la (6.15). Por lo tanto, la presión en el punto z, r cualquiera será, integrando:

$$p(z, r) = p_0 - \rho g (z - z_0) + \frac{1}{2}\Omega^2 \rho \left(r^2 - r_0^2\right)$$

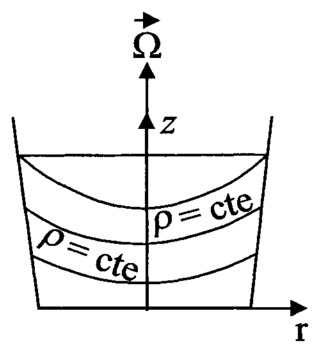
p_0 es la presión en un punto genérico z_0, r_0. Las líneas de igual presión en el plano z, r son las curvas:

$$p_0 - \rho g (z - z_0) + \frac{1}{2}\Omega^2 \rho \left(r^2 - r_0^2\right) = p = \text{cte.}$$

dadas por la ecuación

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{g} r^2 - \left[\frac{p - p_0}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 r_0^2}{g}\right]$$

Para cada valor de p, esto es una parábola. Como todo el plano z, r gira alrededor del eje Ω, estas líneas engendran superficies de presión constante, que son paraboloides de revolución. En particular, si el recipiente fuese abierto, la superficie del líquido (donde la presión es constante e igual a la presión atmosférica) será un paraboloide. Ésa es la forma que toma la superficie del líquido cuando se lo revuelve en una taza.



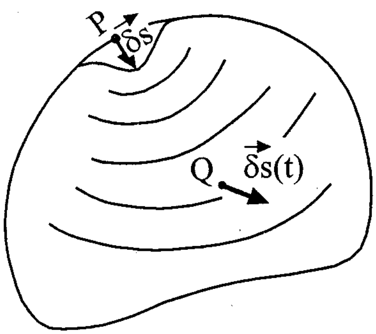
Un cuerpo sumergido en un líquido que gira en equilibrio estará sometido a un empuje inercial *centrípeto*, dirigido hacia el eje de rotación. Por ello, las burbujas en un vaso de cerveza que rota uniformemente se dirigen y acumulan en el centro.

Capítulo 7

Propagación de ondas

a) Propagación de una perturbación elástica

Hasta aquí hemos considerado el caso de un cuerpo elástico en equilibrio de deformación. Vamos a tratar ahora un caso en que esto no ocurre. Sea un cuerpo sin deformación, en equilibrio. Supongamos que golpeamos fuertemente sobre la superficie, produciendo



una deformación instantánea en la región del impacto (punto P). Ello quiere decir que en esa región, por un instante muy breve, ha actuado una fuerza muy grande (percusión), responsable de la deformación local. Se comprueba experimentalmente que la deformación no permanece localizada en las vecindades del punto P, sino que *se propaga* por todo el cuerpo. En un instante *t* posterior al instante del golpe, el punto P puede haber vuelto a su posición original, pero, en cambio, un punto distante Q puede estar desplazado en δs respecto de su posición inicial. Se comprueba, además, que la deformación en un punto Q distante comienza un instante finito después del instante del golpe inicial, indicando que la deformación se propaga con una velocidad *finita*.

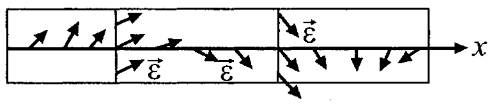
Este fenómeno representa la propagación de una *onda elástica*. En esta propagación no hay transporte de materia: los puntos del cuerpo se desplazan sólo muy poco de su posición inicial. "Lo que llega" de P a Q no es materia, sino una "señal" dada por las tensiones (que le dice al punto ¡a correrse en δs!). Si bien la propagación de una onda no involucra transporte de materia, ella representa un *transporte de energía*. El trabajo que realizan las fuerzas exteriores durante la percusión inicial se reparte en forma de energía elástica por el cuerpo a medida que la onda avanza por él, ya que, cuando alcanza al punto Q, debe realizar trabajo en su entorno para producir la deformación (6.11). Estamos en presencia de un fenómeno de propagación de energía sin transporte de materia. En otras palabras, mediante la propagación de una onda elástica se puede realizar trabajo "a distancia". El medio (cuerpo elástico) transmite, mediante el juego mutuo entre tensiones y deformaciones, la energía necesaria para ello.

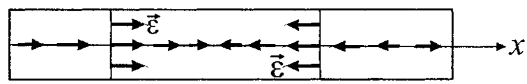
Una onda elástica estará descripta por un estado transiente (variable en el tiempo) de deformaciones. En cada punto, el vector δs será una función del tiempo. Para no confundirnos con el caso estático, indicaremos la deformación transiente de una onda elástica con el símbolo ε (recordando siempre que se trata de una cantidad muy pequeña, infinitesimal). El campo de deformaciones de una onda elástica será, en general, una función vectorial muy complicada:

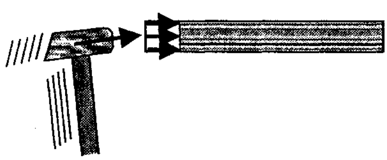
$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$$

Obsérvese bien que ε es el desplazamiento "absoluto" de un punto, o sea, el desplazamiento referido a un centro común para todo el cuerpo.

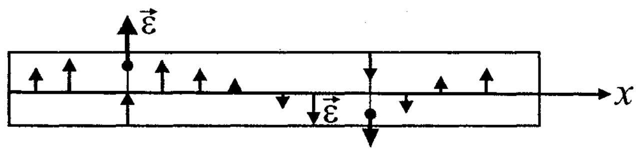
En este capítulo sólo estudiaremos ondas que se propagan en una sola dirección, o sea, ondas en las que la deformación ε sólo depende de una única variable espacial (p. ej., la x). $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ representará entonces una onda que se propaga a lo largo del eje x. Todos los puntos del cuerpo que tienen igual x (o sea, todos los puntos que están en planos perpendiculares a x) tienen el mismo vector deformación ε, en un instante dado. Por eso, este caso se denomina una *onda plana*. En un instante dado, cada punto del eje x tendrá un dado vector ε, que en general podrá tener una orientación cualquiera en el espacio con tal de ser una función continua de x y t (o sea, dos puntos vecinos deben tener vectores que difieran muy poco entre sí). El caso particular en el que, en todo instante y para todo punto, ε es paralelo a la dirección de propagación corresponde a una *onda longitudinal*. En otras palabras, en una onda longitudinal se propagan deformaciones longitudinales (página 199). Es evidente que el fenómeno de propagación de ondas longitudinales, en el que sólo se producen compresiones y dilataciones transientes, estará regido por la acción de esfuerzos normales, responsables de este tipo de deformaciones. Este caso correspondería, por ejemplo, a la propagación de deformaciones en una barra golpeada longitudinalmente en uno de sus extremos.

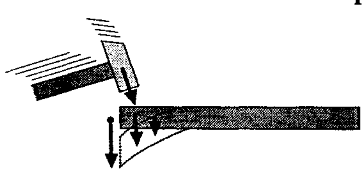




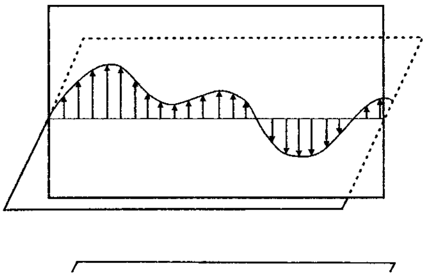


El otro caso particular será aquel en el que el vector ε siempre es perpendicular a la dirección de propagación. Aquí se trata de *ondas transversales*, que representan la propagación de deformaciones transversales o de torsión. Serán responsables para este tipo de ondas los esfuerzos de corte. Este caso ocurrirá cuando golpeamos una barra transversalmente en uno de sus extremos. En las ondas transversales puede presentarse el caso especial en el que, para todo punto del cuerpo y en todo instante, los vectores ε siempre tienen la misma dirección, o sea, están en un mismo plano. En ese caso, la onda está *polarizada rectilíneamente*. El fenómeno de polarización es característico para las ondas transversales; no existe en el caso de ondas longitudinales. En el caso general de una onda transversal no polarizada, la dirección de ε variará continuamente de punto a punto, siendo además función del tiempo, con tal de permanecer siempre en el plano normal a la dirección de propagación.





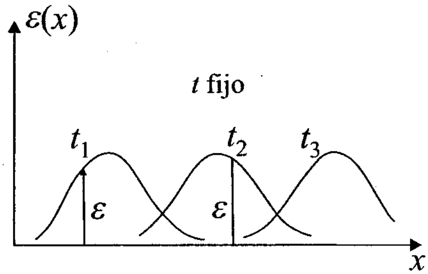
El hecho de que una onda dada sea longitudinal, transversal polarizada o transversal no polarizada, depende del mecanismo o proceso que originó la propagación. Este proceso se



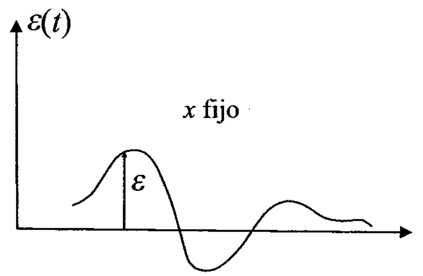
denomina *excitación* de la propagación ondulatoria; la región física del cuerpo donde ocurre (la zona en la que producimos la deformación inicial) se denomina *fuente* de la onda. Toda propagación de una onda elástica necesariamente debe provenir de un proceso de excitación. Si bien puede haber propagación de ondas sin estar actuando simultáneamente la excitación, ésta necesariamente debe haber existido en algún instante anterior.

b) Descripción matemática de una onda elástica plana

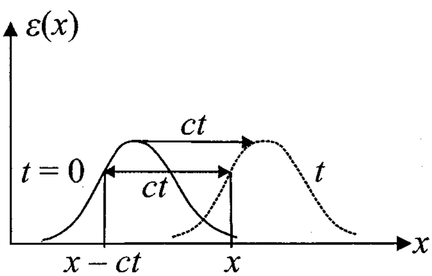
Siendo la deformación ε una función de dos variables, *x*, *t*, es posible describir el fenómeno de propagación en dos formas:



1) Representando la dependencia de $|\varepsilon|$ como función de *x* para un tiempo *t* fijo ("fotografía" instantánea de la onda), y viendo cómo esa representación varía para diferentes instantes t_1, t_2, etc. Esta forma da una idea clara de cómo se propaga la onda, con sólo observar cómo se va desplazando la curva $\varepsilon = \varepsilon(x)$ para los tiempos crecientes ("fotografías" en instantes sucesivos).



2) La otra forma consiste en estudiar cómo depende ε del tiempo, para un punto *x* fijo. Esto da una idea de cómo se mueve un punto dado del cuerpo al pasar la onda por él. En una onda transversal no polarizada, es necesario, además, estudiar cómo varía la dirección de ε con el espacio y el tiempo.



Consideremos la representación 1), o sea, contemplemos la dependencia de ε como función del espacio, en un instante inicial $t = 0$ dado. Tendremos una cierta función $\varepsilon = \varepsilon(x)$ que nos da el estado de deformaciones inicial. Si la onda se propaga hacia las *x* crecientes con una velocidad *c*, al cabo de un cierto tiempo *t* todo el perfil de deformaciones se habrá corrido en un valor *ct* hacia la derecha. Estamos suponiendo aquí que *no hay amortiguación* de la onda. La ecuación correspondiente al instante *t* será, entonces:

$$\varepsilon = \varepsilon(x - ct) \qquad (7.1)$$

Vemos entonces que ε no depende de x y t en forma independiente entre sí, sino que lo hace a través de la variable

$$\xi = x - ct \qquad (7.2)$$

Hay, por lo tanto, una única forma funcional $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, dada por el estado de deformaciones en el instante inicial, con la cual se expresa la onda para un instante posterior cualquiera, mediante la forma (7.1). Si la onda se propaga en dirección contraria a las x, su descripción sería, para un instante cualquiera:

$$\varepsilon = \varepsilon(x + ct)$$

Todo esto puede plantearse de la forma alternada siguiente (basada en la descripción tipo 2). Sea $x = 0$ el punto fuente de una onda elástica que se propaga hacia la derecha. En ese punto, mediante el mecanismo de excitación, se produce una deformación dada $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Suponiendo que esta deformación se propaga sin amortiguamiento hacia la derecha con la velocidad c, un punto dado x tendrá en un instante t la misma deformación que la que tenía el punto fuente en un instante anterior o *tiempo retardado* $t - x/c$ (pues x/c es lo que tardó la deformación en llegar al punto x). El campo de deformaciones en el instante t estará dado, entonces, por la función:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (7.3)$$

Nuevamente, ε depende de un solo argumento, que en esta presentación es el tiempo retardado $\tau = t - x/c$. Hay una sola forma funcional $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ dada por la excitación del punto fuente, con la que el estado de deformaciones queda determinado completamente para todo instante t mediante la (7.3). Esta última descripción del proceso de propagación lineal es en realidad más "física" que la anterior, pues hace intervenir explícitamente la fuente o excitación.

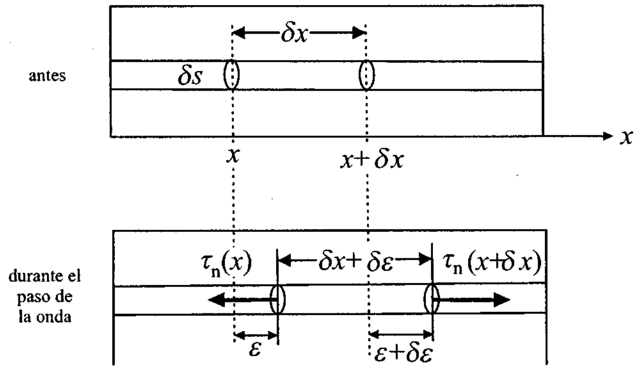
Para el futuro nos serán útiles las siguientes relaciones matemáticas, que se deducen de (7.1) y (7.2):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = -c\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

Esta última, en particular, constituye la ecuación diferencial (a derivadas parciales) de las ondas planas. Obsérvese que $\partial\varepsilon/\partial t = v$, velocidad material de los puntos del cuerpo en el movimiento de deformación. Esta velocidad representa movimiento "genuino" de materia. No se la confunda con la velocidad c de propagación de la onda, la cual *no* representa movimiento de materia alguno. Asimismo, $\partial^2\varepsilon/\partial t^2 = a$, aceleración de los puntos del cuerpo en su movimiento de deformación.



Estamos ahora en condiciones de calcular la velocidad de propagación de una onda elástica en función de las propiedades elásticas del medio. Dado que las ondas longitudinales y las ondas transversales responden a procesos elásticos diferentes (compresión, dilatación y torsión, respectivamente), las velocidades de propagación correspondientes serán diferentes. Estudiaremos primero el caso de una onda longitudinal, que se propaga a lo largo de una barra alargada. Dentro de la barra, consideraremos un tubo de sección infinitesimal δS y, en él, un cilindrito elemental de longitud δx, localizado en x. Cuando pasa la onda por él, o sea, cuando comienza a desplazarse, lo hará impulsado por la resultante de las tensiones sobre sus bases $\tau_n(x)\delta S$ y $\tau_n(x+\delta x)\delta S$. En la deformación correspondiente, el elemento se habrá estirado en $\delta\varepsilon$ (ver dibujo). Obsérvese bien que $\delta\varepsilon$ es un desplazamiento referido al entorno (ver discusión en la página 198). Tendremos las siguientes relaciones:

$$f = [\tau_n(x+\delta x) - \tau_n(x)]\delta S \qquad \text{(resultante)}$$

$$m = \rho\delta S\,\delta x \qquad (\rho \text{ es la densidad del medio})$$

$$a = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de Newton (3.5) que nos dará el movimiento del elemento de volumen se escribirá:

$$[\tau_n(x+\delta x) - \tau_n(x)]\delta S = \rho\,\delta S\,\delta x\, c^2\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$$

Pero

$$\frac{[\tau_n(x+\delta x) - \tau_n(x)]}{\delta x} = \frac{\partial\tau_n}{\partial x}$$

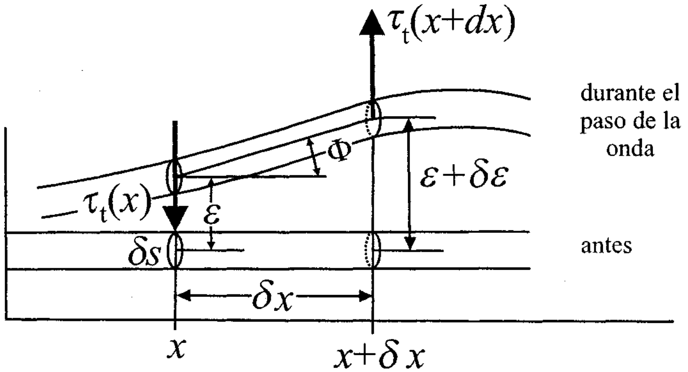
en el límite $\delta x \to 0$ (escribimos derivada *parcial*, pues τ_n también depende del tiempo). Como por la relación elástica (6.6) $\tau_n = E\,\delta\varepsilon/\delta x = E\,\partial\varepsilon/\partial x$ (si $\delta x \to 0$), tenemos finalmente, reemplazando:

$$E\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} = \rho c^2 \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$$

Esto sólo vale si E es independiente de x, o sea, si el cuerpo es *homogéneo*. Queda finalmente:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (7.4)$$

Ésta es la expresión fundamental para la velocidad de propagación de ondas elásticas longitudinales. Cuanto mayor sea E (mayor resistencia tenga el cuerpo a las deformaciones, o sea, mayor rigidez), y cuanto menor sea ρ (menor densidad), mayor será la velocidad de propagación.



Para el caso de ondas transversales, volvamos a considerar el caso de una barra alargada, y, en ella, un tubo de sección infinitesimal. Durante el paso de la onda transversal, la posición del tubo será, por ejemplo, la de la figura. Ahora serán los esfuerzos tangenciales de corte $\tau_t(x+\delta x)$ y $\tau_t(x)$ los responsables del movimiento transversal del elemento en cuestión. La ecuación de movimiento (3.5), en la dirección perpendicular a x, será análoga al caso anterior:

$$[\tau_t(x+\delta x) - \tau_t(x)]\delta S = \rho\,\delta S\,\delta x\, c^2 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$$

Por la relación elástica para torsiones (6.7):

$$\tau_t = T\Phi = T\frac{\delta\varepsilon}{\delta x} = T\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \qquad (\text{si } \delta x \to 0)$$

y

$$\frac{[\tau_t(x+\delta x) - \tau_t(x)]}{\delta x} = \frac{\partial \tau_t}{\partial x} = T\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \qquad (\text{si } T = \text{cte.})$$

Entonces, para un cuerpo homogéneo (T = cte.), queda la relación:

$$T\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}=\rho c^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$$

O sea:

$$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (7.5)$$

Como en general $T<E$, la velocidad de propagación de una onda transversal será menor que la velocidad de una onda longitudinal, aun tratándose de un mismo medio. En los fluidos no viscosos no pueden propagarse ondas transversales, pues no pueden actuar esfuerzos de corte, responsables de este tipo de ondas ($T\equiv 0$).

Obsérvese finalmente que la velocidad de propagación c (7.4) o (7.5) es una constante propia de cada material; el valor de la velocidad de una onda no depende de la forma particular de la onda. Pero esto sólo vale para medios *homogéneos* e *isótropos*. Efectivamente, para medios inhomogéneos, E (o T) es una función de la posición x. Por lo tanto, en la deducción de la (7.4), tendríamos:

$$\frac{\partial\tau_n}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)=E\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\rho c^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$$

Entonces,

$$c=\sqrt{\frac{E+\dfrac{\partial E}{\partial x}\dfrac{\partial\varepsilon/\partial x}{\partial^2\varepsilon/\partial x^2}}{\rho}}$$

En esta expresión E, $\partial E/\partial x$ y ρ dependen del material. Pero el factor $\partial\varepsilon/\partial x/\left(\partial^2\varepsilon/\partial x^2\right)$ depende de la forma de la onda en cuestión. En ese caso la velocidad c no sólo depende del medio, sino también de la onda misma. Este fenómeno se denomina *efecto de dispersión*. En medios inhomogéneos se produce el efecto de dispersión, porque ondas de diferente forma se propagan con velocidades diferentes. Es importante observar que, para una onda de gran amplitud, la deformación en la oscilación misma produce una inhomogeneidad apreciable; por ello, ondas muy intensas sufren dispersión aun si el medio original es homogéneo.

Consideremos dos ejemplos de la práctica. Para ondas longitudinales consideremos las que se propagan en un gas. Esas ondas se denominan *ondas acústicas*, por cuanto nuestro oído es sensible a ellas (dentro de ciertos límites). Volvamos a considerar la ecuación de movimiento longitudinal en un cilindrito paralelo a la dirección de propagación, teniendo en cuenta que ahora $\tau_n=-p$ (6.12):

$$\rho c^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ahora bien, para los gases, hay una relación unívoca (dada por la *termodinámica*) entre la presión y la densidad:

$$p = p(\rho)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Antes de seguir, veamos qué pasa con la densidad en las vecindades de un punto de un gas, cuando pasa una onda elástica. Consideremos, como siempre, el cilindrito de área δS y longitud inicial δx. En él, la masa de gas será $\delta m = \rho_0(x)\delta S\, \delta x$, donde $\rho_0(x)$ es la densidad inicial en esa región. Durante el paso de la onda, el cilindrito habrá variado su volumen en $\delta S(\delta x + \delta \varepsilon)$, permaneciendo su masa δm constante. Por lo tanto, $\delta m = \rho_0(x)\delta S\, \delta x = \rho(x)\delta S\,(\delta x + \delta \varepsilon)$. $\rho(x)$ es la densidad durante la deformación.

O sea:

$$\rho(x) = \rho_0(x)\frac{\delta x}{\delta x + \delta \varepsilon} = \rho_0(x)\frac{1}{1 + \delta \varepsilon/\delta x}$$

Teniendo en cuenta que $\delta \varepsilon \ll \delta x$ (página 201), y considerando el caso de un gas inicialmente en equilibrio, libre de fuerzas ($\rho_0 = \text{cte.}$), tenemos:

$$\rho(x) = \rho_0(x)\frac{1}{1 + \delta \varepsilon/\delta x} \cong \rho_0\left(1 - \frac{\delta \varepsilon}{\delta x}\right) = \rho_0\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) \qquad (7.6)$$

O sea:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

En resumen tenemos, para la ecuación de movimiento:

$$\rho_0 c^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho}\rho_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

Queda para la velocidad de las ondas acústicas

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

La termodinámica demuestra que, para procesos de compresión-dilatación tan rápidos como los que ocurren en una onda acústica (procesos adiabáticos), vale la relación

$$\frac{dp}{p_0} = \gamma \, \frac{d\rho}{\rho_0} \qquad (7.7)$$

(γ es la relación entre los calores específicos a presión constante y volumen constante $\gamma = c_p / c_v$. Para gases diatómicos vale $\gamma = 7/5$). Por otra parte, la relación entre la densidad inicial ρ_0, la presión p_0 y temperatura es:

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}$$

donde M es el peso molecular. Entonces queda, finalmente, para la velocidad de las ondas acústicas en un gas:

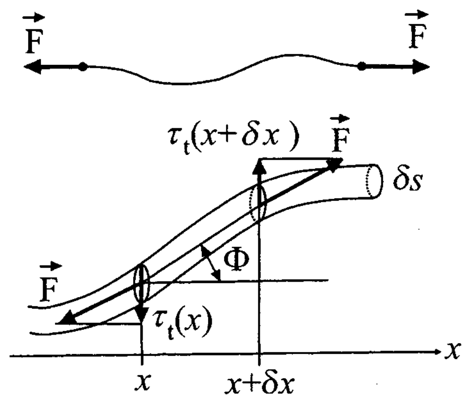
$$c = \sqrt{\frac{\gamma \, p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma \, RT}{M}} \qquad (7.8)$$

Para el aire a temperatura de 0° C, resulta c = 331 m/seg. Obsérvese que la velocidad de las ondas acústicas *es independiente de la presión*, dependiendo sólo de la temperatura. Cuanto mayor sea ésta, tanto más rápido se propagan las ondas. Cuanto menor sea el peso molecular M, mayor será *c*. En hidrógeno a 0° C, c = 1270 m/seg. El hecho de que la velocidad de las ondas elásticas en un gas sólo dependa de la temperatura no es sorprendente. Efectivamente, cuanto mayor sea la temperatura, mayor será la velocidad media de las moléculas del gas en su movimiento térmico, y, con ello, mayor será la velocidad con que se puede transmitir "mensajes" por el gas. Las moléculas mismas son los "emisarios": al propagarse una onda elástica, una molécula choca a la vecina, y ésta a la siguiente, y así sucesivamente. Se puede ver con esta imagen cruda, que la velocidad de propagación en un gas será aproximadamente igual a la velocidad media de las moléculas, la que es independiente de la presión, dependiendo sólo de *T*.

Para estudiar un caso real de ondas transversales, consideremos el de una cuerda tensa, fija en sus extremos, bajo la acción de dos fuerzas **F** y – **F**. Sea δS la sección normal (muy pequeña) de la cuerda. Contemplemos el movimiento de una porción de longitud δx. La tensión tangencial en *x* será:

$$\tau_t(x) = \frac{F \operatorname{sen} \Phi}{\delta S} \cong \frac{F}{\delta S} \Phi$$

Φ es en realidad siempre muy pequeño. Teniendo en cuenta la (6.7), vemos que en el caso de la cuerda tensa el módulo de torsión es:



$$T = \frac{F}{\delta S}$$

Por lo tanto, reemplazando en (7.5):

$$c = \sqrt{\frac{F}{\delta S\, \rho}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (7.5a)$$

donde $\mu = \rho\,\delta S = \delta m / \delta x$ es la densidad "lineal" de la cuerda (masa por unidad de longitud). La velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda es, entonces, tanto mayor cuanto mayor sea la fuerza de tensión F y cuanto menor sea su densidad lineal μ.

Observemos finalmente que en todos estos casos la velocidad c estaba referida a un sistema de coordenadas fijo al medio. Esa velocidad depende exclusivamente de las propiedades del medio (homogéneo). Para todo otro sistema de coordenadas que se traslada respecto del original, la velocidad de la onda estará dada por la transformación de Galileo (3.23c). Cuando se describe el fenómeno de propagación de una onda hay, por lo tanto, siempre un sistema de coordenadas "privilegiado": es aquél respecto del cual el medio material está en reposo. El movimiento de una onda elástica puede describirse entonces en una forma "absoluta": entre todos los sistemas inerciales habrá uno bien definido, que se distingue físicamente de todos los demás; es aquél para el cual la velocidad de las ondas es exactamente (7.4) o (7.5). Será el sistema fijo al medio. El proceso de propagación de una onda elástica no cumple entonces con el principio de relatividad (capítulo 3, k), pues con él sería posible distinguir físicamente un sistema inercial de otro (midiendo la velocidad de propagación y comparando el resultado con la (7.4) o la (7.5)). Pero esto se debe a que para este proceso necesariamente debe haber un medio material en el que tenga lugar la propagación medio que de por sí ya define un sistema de coordenadas privilegiado.

c) Ondas sinusoidales

Estudiaremos ahora el caso particular de *ondas sinusoidales*. Éstas tienen una importancia fundamental en física, porque muchos de los procesos naturales de excitación que dan origen a una propagación ondulatoria son del tipo sinusoidal (vibraciones armónicas). Una onda sinusoidal está dada por la función sinusoidal más general $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}[k\xi + \varphi]$, en la que ε_0, k y φ son parámetros. Teniendo en cuenta que $\xi = x - ct$ (7.2), queda para la forma más general de una onda sinusoidal:

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}[k(x - ct) + \varphi]$$

El parámetro ε_0 es la amplitud (deformación máxima) de la onda; φ es la fase inicial y k es el "número de onda". Podemos introducir en lugar de k un parámetro más intuitivo: la *longitud de onda*. Definimos a ésta como la distancia mínima entre dos puntos del medio que en un instante dado tienen igual elongación ε e igual velocidad material $v = \partial\varepsilon/\partial t$. Por lo tanto, deberán distar un valor λ tal que sus argumentos difieran en 2π. Es fácil comprobar que

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Para todos los casos de ondas que interesan en este capítulo, resulta $\lambda \gg \varepsilon_0$. Asimismo, se define el período τ como el intervalo de tiempo mínimo al cabo del cual un punto dado tiene igual elongación e igual velocidad. Para τ resulta:

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{k\,c}$$

La frecuencia es

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{\lambda}$$

(No confundir el símbolo ν (nu) con el usado para la velocidad, v.) La cantidad

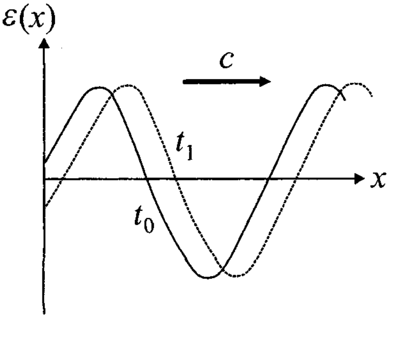
$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda} = k\,c$$

se llama *pulsación*. Hay, por lo tanto, muchas formas equivalentes para expresar una onda sinusoidal:

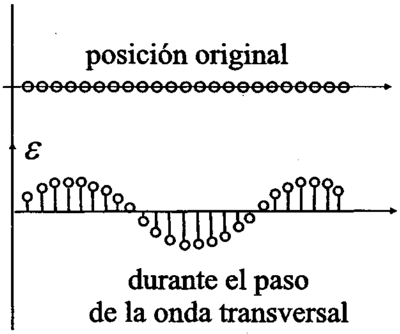
$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right] = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) + \varphi\right] =$$

$$= \varepsilon_0 \operatorname{sen}[(kx - \omega t) + \varphi] = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c} - t\right) + \varphi\right]$$

Obsérvese que, en una onda sinusoidal, cada punto del medio ejecuta un movimiento oscilatorio armónico (3.20). Por otra parte, la representación de ε como función de x, para un instante dado, también es una curva sinusoidal. El perfil de esta curva se desplaza con velocidad c hacia la derecha.

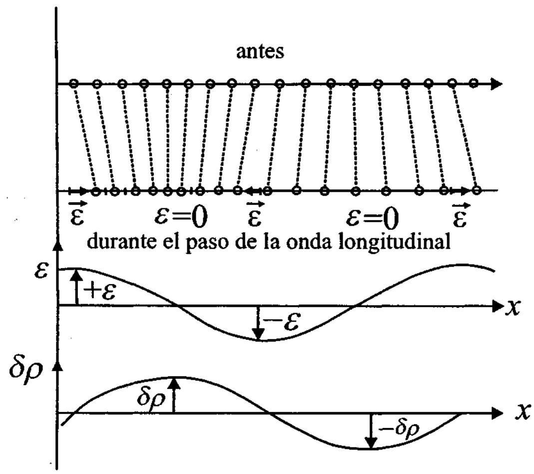


En una onda sinusoidal transversal ($\varepsilon \perp \mathbf{c}$), la posición efectiva de los puntos que inicialmente están sobre una recta paralela a la dirección de propagación tiene la forma de una curva sinusoidal. En una onda longitudinal, ello no ocurre, puesto que los puntos se desplazan permaneciendo sobre la misma recta. Lo que obtenemos en este caso serán aumentos y disminuciones alternados de densidad, en la forma ilustrada en la figura.



Esto se puede precisar matemáticamente: la variación de la densidad $\delta\rho = \rho - \rho_0$ será, de acuerdo a la (7.6):

$$\delta\rho(x,t) = -\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\rho_0\, \varepsilon_0 k \cos[k(x-ct)+\varphi] = \rho_0 \frac{2\pi\varepsilon_0}{\lambda} \operatorname{sen}\left[k(x-ct)+\varphi+\frac{\pi}{2}\right]$$



(recuérdese que hemos dicho que $\varepsilon_0/\lambda \ll 1$). Se ve que la variación de densidad también es una función sinusoidal y que está *desfasada* (adelantada) en $\pi/2$ respecto de la deformación. Obsérvese que los lugares en que la densidad tiene su valor máximo o mínimo son aquellos que tienen desplazamiento nulo, $\varepsilon = 0$, pues allí los puntos del medio se acercan o se alejan los unos de los otros.

En el caso particular de una onda acústica sinusoidal en un gas (sonido), tenemos la relación adiabática (7.7) entre $\delta\rho$ y δp. Por lo tanto, una onda acústica sinusoidal se puede interpretar alternativamente como un fenómeno de oscilaciones periódicas de la presión, dada por

$$\delta p = \frac{\gamma p}{\rho_0}\delta\rho = \gamma p \frac{2\pi\varepsilon_0}{\lambda} \operatorname{sen}\left[k(x-ct)+\varphi+\frac{\pi}{2}\right] = \delta p_0 \operatorname{sen}\left[k(x-ct)+\varphi+\frac{\pi}{2}\right] \qquad (7.9)$$

$\delta p_0 = \gamma p\, 2\pi\varepsilon_0/\lambda$ es la amplitud de la onda sonora y representa el aumento máximo de presión en la oscilación. Teniendo en cuenta (7.8), también podemos poner

$$\delta p_0 = c^2 \rho^2 \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_0 = c\,\rho\,\omega\,\varepsilon_0 \qquad (7.10)$$

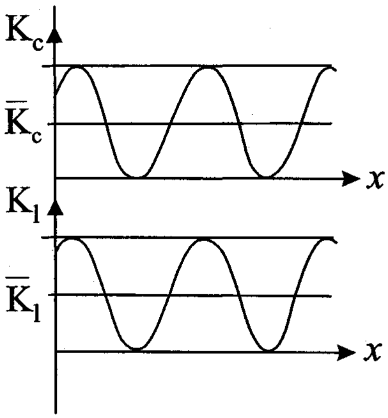
Esta representación de una onda sonora es preferible a la descripción dada por los desplazamientos reales de los puntos del medio, por cuanto estos desplazamientos son pequeñísimos y muy difíciles de medir en la práctica. En cambio, es mucho más fácil detectar y visualizar (¡y oír!) las variaciones de presión δp.

Veamos el balance energético en una onda sinusoidal longitudinal. La energía cinética de un cilindrito de longitud δx, sección δS y velocidad instantánea v será, para una onda $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 \,\mathrm{sen}[kx - \omega t + \varphi]$:

$$dT = \frac{1}{2}\delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho\,\delta S\,\delta x v^2 = \frac{1}{2}\rho\,\delta S\,\delta x\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2\delta S\,\delta x\cos^2[kx - \omega t + \varphi]$$

Dividiendo por el volumen del cilindrito, obtenemos la *densidad de energía cinética*:

$$K_C = \frac{\delta T}{\delta V} = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2\cos^2[kx - \omega t + \varphi]$$



Ésta es una función periódica del tiempo y del espacio. El valor máximo posible es $1/2\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2$ y el valor medio será $1/4\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2$.

Pero ésta no es toda la energía involucrada en una onda elástica sinusoidal. En todo instante, el medio está deformado, conteniendo, por lo tanto, una energía elástica en forma de energía potencial de deformación. La *densidad de energía elástica* será, de acuerdo con la (6.9) y la (6.1):

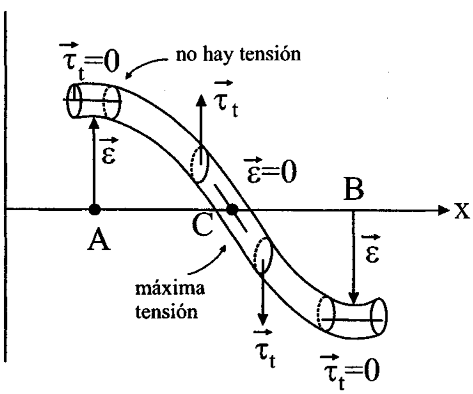
$$K_L = \frac{1}{2}E\Delta^2 = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}E k^2\varepsilon_0^2\cos^2[kx - \omega t + \varphi]$$

Teniendo en cuenta, por la (7.4), que $E = \rho c^2$ y $kc = \omega$, obtenemos:

$$K_L = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2\cos^2[kx - \omega t + \varphi] = K_C$$

El valor medio será $\overline{K_L} = 1/4\rho\,\omega^2\varepsilon_0^2 = \overline{K_C}$.

Es fácil comprobar que estas expresiones valen tanto para ondas longitudinales como para ondas transversales. Las densidades de energía cinética y elástica son, entonces, funciones periódicas, estando además en fase. Ello quiere decir que en una porción del medio, en la que en un instante

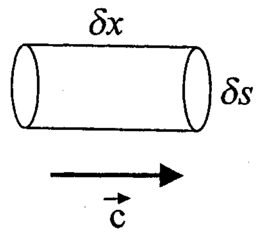


dado la densidad de energía cinética es máxima, también la densidad de energía elástica instantánea será máxima. Esto aparenta ser un contrasentido, pero se explica fácilmente observando la figura adjunta, correspondiente a una onda transversal. En los máximos de oscilación (A y B), en realidad no hay deformación de torsión del elementito de volumen (éste está trasladado paralelamente a sí mismo, de su posición inicial de equilibrio). Por lo tanto, su energía de deformación será nula. Y también será nula su energía cinética, por cuanto está en el máximo de elongación. En cuanto a los elementos de volumen con elongación nula, como en C, ellos presentan una torsión máxima respecto de la posición de equilibrio (pese a que su desplazamiento total ε respecto de ésta sea nulo). Estos elementos, además, tienen una velocidad máxima. Por eso, en los puntos A y B, las densidades de energía cinética y elástica serán nulas, presentando en cambio un máximo en C.

La densidad de energía total media de una onda sinusoidal es

$$\overline{K_L} = \overline{K_C} = 1/2\rho\omega^2\varepsilon_0^2 = 2\pi^2\rho\nu^2\varepsilon_0^2 \qquad (7.11)$$

Observemos que la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación y al cuadrado de la frecuencia.



Sea un elemento de volumen cilíndrico paralelo a la propagación, como el de la figura. Toda la energía media contenida en él atraviesa perpendicularmente el área δS en un tiempo $\delta t = \delta x/c$. Esta energía es, en promedio:

$$\delta W = \overline{K}\,\delta x \delta S = 1/2\rho\omega^2\varepsilon_0^2\, c\,\delta t\,\delta S$$

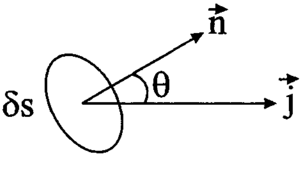
Se define como *flujo de energía* al cociente diferencial

$$j = \frac{\delta W}{\delta S\,\delta t} = 1/2\rho\omega^2\varepsilon_0^2 \qquad (7.12)$$

Numéricamente representa la energía que en la unidad de tiempo atraviesa la unidad de área perpendicular a la propagación. Puede introducirse un *vector* flujo de energía en la forma

$$\mathbf{j} = \overline{K}\mathbf{c} = 1/2\rho\omega^2\varepsilon_0^2\,\mathbf{c}$$

Es fácil comprobar que con este vector es posible expresar la energía que en un intervalo δt pasa por una superficie δS de normal **n** cualquiera, en la forma



$$\delta W = \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,\delta S\,\delta t = j\cos\theta\,\delta S\,\delta t$$

El vector **j** se denomina también *intensidad* de la onda. Obsérvese que representa la potencia que la onda transporta a través de la unidad de superficie. Sus dimensiones son, en el sistema técnico, Vatio/m^2. Recuérdese que siempre se trata de *valores medios*. En el caso del sonido, j es detectada por nuestro oído como la "fuerza" de la vibración. Por eso

precisamente la llamamos intensidad. Teniendo en cuenta la relación (7.10), obtenemos para la intensidad del sonido

$$j = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(\frac{\delta p_0}{c\rho\omega}\right)^2 c = \frac{1}{2}\frac{\delta p_0^{\,2}}{c\rho} \qquad (7.13)$$

Este valor es independiente de ω, o de la frecuencia, siendo proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilaciones de presión.

Como en acústica el rango útil de valores de j es muy amplio, cubriendo varias potencias de diez, los ingenieros inventaron una magnitud logarítmica asociada a la intensidad, definida (arbitrariamente) por:

$$I = 10\log\frac{j}{j_0} \qquad \text{(logaritmo decimal)}$$

donde $j_0 = 10^{-12}$ Vatios/m^2 (= 10^{-16} Vatios/cm^2) es el orden de magnitud de la intensidad mínima audible. La unidad de I es el *decibel* (en honor a Alexander Graham Bell). Obsérvese que $I = 0$ *no* significa intensidad cero, sino $j = j_0$. Un valor de I negativo significa $j < j_0$. I no es una magnitud física genuina, pues no es sumable en el sentido definido en el capítulo 1, a.

Finalmente, hagamos dos o tres observaciones importantes acerca de ondas sinusoidales. En primer lugar, aquí sólo hemos considerado ondas planas, que se propagan con una velocidad c dada por (7.4) o (7.5) en una dirección dada. Cuando la excitación de la onda está localizada en un punto situado en el interior del medio elástico, no se obtiene la propagación de una onda plana, sino una *onda esférica*. Todos los puntos *equidistantes* de la fuente vibran en la misma fase. Las superficies de onda son, entonces, esferas centradas en el punto fuente, que se expanden con la velocidad c. Una onda sinusoidal esférica se escribirá:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{r}{c} - t\right) + \varphi\right]$$

La potencia total que atraviesa la esfera de radio r es, de acuerdo con (7.12):

$$P = 4\pi r^2 j = 2\pi r^2 \rho\omega^2\varepsilon_0^2 c$$

Si no hay disipación de energía en el medio (no hay amortiguamiento), esa potencia deberá ser la misma para toda superficie esférica e igual a la *potencia irradiada* por la fuente. Eso querrá decir que la amplitud ε_0 debe ser inversamente proporcional a la distancia r. La intensidad de ondas esféricas decrecerá, entonces, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.

Otra observación importante es la siguiente: hemos supuesto aquí que la velocidad de una onda está dada por (7.4) o (7.5) independientemente de la frecuencia. Esto sólo vale en medios homogéneos. Hemos visto en la página 224 que en medios inhomogéneos se

presenta el fenómeno de la dispersión. Para ondas sinusoidales, el fenómeno de dispersión se manifiesta como una dependencia de la velocidad c de la frecuencia, $c = c(\nu)$, además del medio. Esto también vale para medios homogéneos, si la intensidad de la onda es muy grande.

Por último, cuando hemos hablado de frecuencia de una onda, siempre nos hemos referido a la frecuencia para un observador fijo al medio elástico (sistema "privilegiado"). Cuando el observador se traslada respecto del medio, él ve una frecuencia diferente, que depende de la velocidad de traslación. Éste es el llamado *efecto Doppler*. Asimismo, si la fuente emisora de ondas sinusoidales se mueve respecto del medio, la frecuencia en ese medio es diferente de la original, dependiendo de la velocidad de la fuente y de la dirección del movimiento de la misma respecto del observador. Se puede demostrar que la relación entre la frecuencia ν_0, determinada por el observador que se mueve en la dirección x con la velocidad V_0, y la frecuencia ν_f, con que las ondas son emitidas por la fuente que se mueve con velocidad V_f, también en la dirección x, está dada por $\nu_f/(c+V_f)=\nu_0/(c+V_0)$. Este efecto es bien conocido en acústica (cambio de la altura del tono de la bocina de un automóvil cuando pasa al lado del observador).

d) El principio de superposición; interferencia y batidos

Estudiaremos ahora una característica fundamental para todo proceso de propagación ondulatoria, que juega un papel esencial en la física. Se refiere a la superposición de dos o más ondas individuales. La experiencia muestra que si un medio es atravesado por dos o más ondas provenientes de fuentes o excitaciones independientes entre sí, cada onda se propaga individualmente, sin ser molestada o influida por las demás. La deformación resultante es la suma vectorial de las deformaciones correspondientes a las ondas individuales.

Este resultado experimental no es de ningún modo trivial. Quiere decir que, cuando se propagan varias ondas de orígenes (fuentes) independientes entre sí, cada punto del medio ejecuta simultáneamente los mandatos encomendados por las señales que le llegan por las tensiones elásticas, correspondientes a las ondas individuales. En otras palabras, una onda no puede "tragarse" a otra; cada una se propaga como si no existieran las demás. Este resultado suele denominarse el *principio de superposición.*

Vamos a analizar algunos fenómenos característicos que se basan en el principio de superposición. Uno de éstos es el fenómeno de *interferencia total*. En esencia, ocurre cuando a un punto dado del medio llegan dos órdenes "opuestas", de manera tal que para ejecutarlas simultáneamente el punto, sencillamente, debe permanecer en reposo. En este fenómeno de interferencia, la superposición de dos o más ondas tiene por resultado un efecto nulo. Pero mucho cuidado: esto *no* quiere decir que las ondas se hayan "destruido" mutuamente. Cada onda subsiste y conserva su individualidad; lo que es nulo es la *suma* de los *efectos* de las ondas participantes.

Estudiemos el fenómeno de interferencia para ondas sinusoidales; consideremos, por ejemplo, las ondas sonoras. Sean dos ondas planas que se propagan en la dirección del

eje x, de la misma amplitud y frecuencia, provenientes de dos fuentes distintas. Sólo podrán diferir, entonces, en su fase:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\varphi_1\right]$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\varphi_2\right]$$

La onda resultante será la suma algebraica (recuérdese que

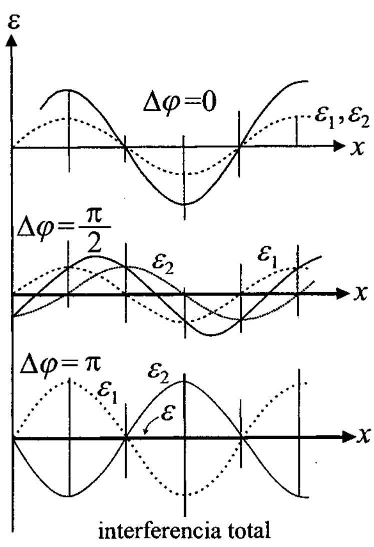
$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}[(\alpha+\beta)/2]\ \cos[(\alpha-\beta)/2]$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left\{\operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\varphi_1\right]+\operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\varphi_2\right]\right\}=$$

$$=2\varepsilon_0\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right]=\varepsilon'\operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c}-t\right)+\varphi'\right]$$

Volvemos a obtener una onda sinusoidal, de una amplitud que depende de la diferencia de fase $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\varepsilon' = 2\varepsilon_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$



Para $\Delta\varphi = 0$, $\varepsilon' = 2\varepsilon_0$, valor máximo que puede tener ε. En este caso las ondas *refuerzan* su acción al máximo. En cambio, si $\Delta\varphi = \pi$, $\varepsilon' = 0$: las dos ondas anulan mutuamente su efecto. Éste es el caso de *interferencia total*. La interferencia de ondas sonoras puede demostrarse fácilmente en la práctica, superponiendo dos ondas de una misma fuente, pero que han recorrido diferente camino (habiéndose, por tanto, desfasado).

Otro fenómeno típico, consecuencia del principio de superposición, es el fenómeno de los *batidos* o de la "pulsación". Ocurre cuando se superponen dos ondas sinusoidales de la misma amplitud ε_0 y dirección de propagación, pero que tienen frecuencias ν_1 y ν_2 ligeramente diferentes entre sí. Sea $\nu_1 = \nu_2 + 2\delta$, $\delta \ll \nu_2$. Entonces la onda suma será:

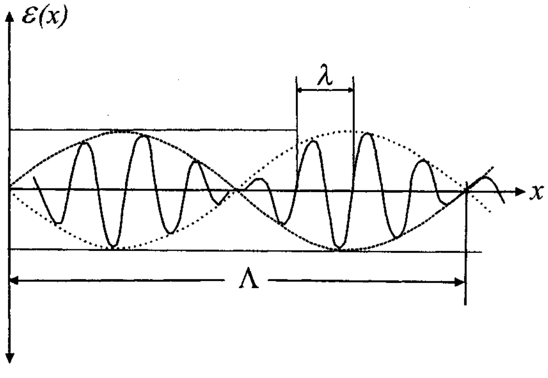
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left\{ \mathrm{sen}\left[2\pi\nu_1\left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi_1 \right] + \mathrm{sen}\left[2\pi\nu_2\left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi_2 \right] \right\} =$$

$$= 2\varepsilon_0 \cos\left[2\pi\delta\left(\frac{x}{c} - t \right) + \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \mathrm{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi \right]$$

donde $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ y $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$. Obsérvese que, por ser δ muy pequeño, $\nu \approx \nu_1 \approx \nu_2$. La expresión anterior se puede escribir

$$\varepsilon = \varepsilon_0' \,\mathrm{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi \right] \quad \text{en la que} \quad \varepsilon_0' = 2\varepsilon_0 \cos\left[2\pi\delta\left(\frac{x}{c} - t \right) + \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \qquad (7.14)$$

Este resultado se puede interpretar como una onda sinusoidal de una frecuencia $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$ (muy parecida a ν_1 y ν_2) y de amplitud ε_0' *modulada sinusoidalmente*, con una frecuencia muy pequeña $\delta \ll \nu$. El aspecto de la onda es:



La longitud de onda asociada al batido, o sea, asociada a la modulación de amplitud, es $\Lambda = c/\delta = 2c/(\nu_1 - \nu_2)$. Obsérvese que $\Lambda >> \lambda = c/\nu = 2c/(\nu_1 + \nu_2)$. En acústica, el batido se obtiene superponiendo dos ondas sonoras sinusoidales de frecuencia muy semejante. Se percibe una onda sonora de prácticamente la misma frecuencia, de intensidad variable sinusoidalmente (batido). La variación de la intensidad es tanto más lenta cuanto más cercanas entre sí son las frecuencias originales. En este fenómeno se basa el principio de afinación de instrumentos musicales (ver capítulo 7, f).

e) Ondas estacionarias

El tercer fenómeno prototipo para superposición de ondas sinusoidales es el de las *ondas estacionarias*. Éstas se obtienen cuando se superponen dos ondas sinusoidales de la misma frecuencia y amplitud, pero que viajan en direcciones contrarias. Obtenemos para la elongación suma:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left\{ \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{c} + t \right) + \varphi_1 \right] + \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi_2 \right] \right\} =$$

$$= 2\varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}ct + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right]$$

Observemos que se ha separado la parte espacial de la parte temporal. La onda suma no es más una función de la variable única $\xi = x \pm ct$. Esto quiere decir que ya no se trata más de una onda progresiva. Cada punto oscila sinusoidalmente con una amplitud ε' que depende del punto *x*, donde

$$\varepsilon' = 2\varepsilon_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right]$$

Hay puntos fijos que nunca oscilan. Son aquellos para los que $\varepsilon' = 0$, o sea, para los que

$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = n\pi \qquad (n \text{ entero})$$

Las coordenadas de estos puntos que no vibran, llamados *nodos* de la onda estacionaria, son, entonces:

$$x_n = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4\pi}\lambda$$

Obsérvese que la distancia entre dos nodos cualesquiera es un múltiplo entero de $\lambda/2$:

$$\Delta_{nn'} = x_n - x_{n'} = (n - n')\frac{\lambda}{2} = k\frac{\lambda}{2} \qquad (k \text{ entero}) \qquad (7.15)$$

Hay otros puntos, llamados *vientres*, cuya amplitud de oscilación es máxima. Son aquellos para los cuales $\varepsilon' = 2\varepsilon_0$, o sea:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad (n \text{ entero})$$

Sus coordenadas son

$$x_n = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4\pi}\lambda$$

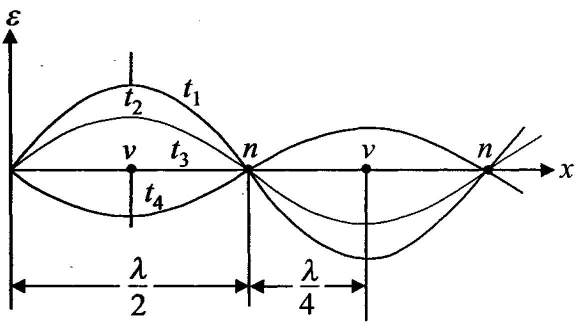
Obsérvese que un vientre está en el punto medio entre dos nodos. La distancia entre dos vientres es, nuevamente, un múltiplo entero de $\lambda/2$:

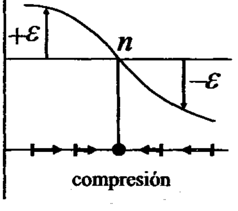
$$\Delta_{vv'} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} - (2n'+1)\frac{\lambda}{4} = k\frac{\lambda}{2} \qquad (k \text{ entero}) \qquad (7.16)$$

En cambio, la distancia entre un nodo y un vientre es un múltiplo impar de $\lambda/4$:

$$\Delta_{nv} = \frac{n\lambda}{2} - (2n'+1)\frac{\lambda}{4} = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (7.17)$$

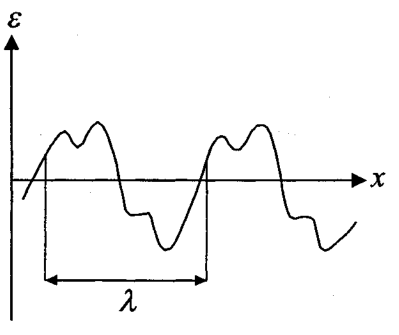
El aspecto de una onda estacionaria para diferentes instantes t_1, t_2, t_3, ..., es:





Hay instantes en los que la elongación de todos los puntos es cero. El hecho de que la forma de la onda no se desplaza, sino que aparece "atada" o "empotrada" en los nodos, justifica el nombre onda "estacionaria". Asimismo, una onda estacionaria no representa un transporte o flujo de energía neto, sino energía confinada localmente en el medio, en el cual tiene lugar un juego de conversión de energía elástica en energía cinética y viceversa. En particular, en los instantes en los que las elongaciones de todos los puntos son nulas, toda la energía es cinética (no hay deformación); cuando, en cambio, todas las elongaciones son máximas, toda la energía es elástica (velocidad de los puntos nula).

En una onda acústica es necesario inspeccionar el fenómeno de ondas estacionarias un poco más de cerca. Efectivamente, ya hemos dicho en el Capítulo 7, c que una onda longitudinal en un gas puede ser descripta como vibraciones, o sea, desplazamientos de los puntos (moléculas) del medio, o como oscilaciones de la presión (7.9). Teniendo en cuenta el desfasaje entre las vibraciones y las oscilaciones de presión, dado en (7.9), es fácil ver que los nodos de vibración de una onda acústica estacionaria son vientres de presión (amplitud de oscilación de



presión máxima), y viceversa. En otras palabras, los puntos que vibran con amplitud máxima tienen variaciones de presión nula. En los puntos que permanecen en reposo, se registran aumentos y disminuciones de presión máximos. Esto, a primera vista, podría parecer "antiintuitivo". Pero tiene una explicación sencilla si se tiene en cuenta el hecho de que, en los nodos de vibración, los desplazamientos longitudinales de los puntos tienen signo opuesto de uno y del otro lado del nodo. Esto quiere decir que los puntos se acercan o alejan mutuamente del nodo, causando una compresión o una dilatación, respectivamente (ver discusión en la página 228).

Gracias al principio de superposición, las ondas sinusoidales cobran una importancia especial. Consideremos una onda periódica general (no sinusoidal) dada en el instante $t = 0$ por una función periódica $\varepsilon(x)$, tal que:

$$\varepsilon(x + n\lambda) = \varepsilon(x)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x + n\lambda) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x)$$

De acuerdo con el *teorema de Fourier*, una función periódica como la $\varepsilon(x)$ puede expresarse (dentro de ciertos límites) como suma de funciones sinusoidales en la forma

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= a_0 + a_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x + a_2 \operatorname{sen} 2\frac{2\pi}{\lambda}x + a_3 \operatorname{sen} 3\frac{2\pi}{\lambda}x + \ldots + \\ &+ b_1 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x + b_2 \cos 2\frac{2\pi}{\lambda}x + b_3 \cos 3\frac{2\pi}{\lambda}x + \ldots = \\ &= a_0 + \sum_{n+1}^{\infty}\left(a_n \operatorname{sen} n\frac{2\pi}{\lambda}x + b_n \cos n\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\end{aligned} \qquad (7.18)$$

donde los coeficientes a_n y b_n se calculan a partir de $\varepsilon(x)$ mediante las expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \varepsilon(x)\ dx \qquad a_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \varepsilon(x)\ \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \varepsilon(x)\ \cos\left(n\frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx$$

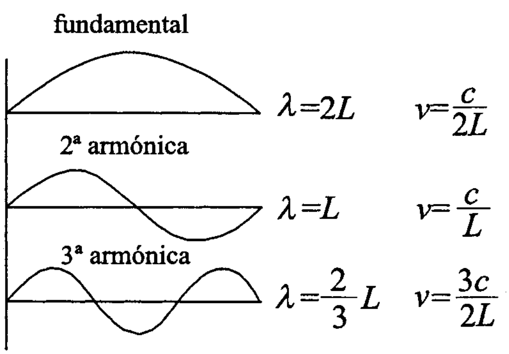
Teniendo en cuenta el principio de superposición, este resultado puramente matemático puede interpretarse físicamente. Efectivamente, gracias a la (7.18), toda onda periódica general puede considerarse como una superposición física de ondas sinusoidales puras, de longitudes de onda decrecientes $\lambda_n = \lambda/n$, o frecuencias crecientes $\nu_n = n\nu$, múltiplos enteros de la frecuencia $\nu = c/\lambda$. Por ello, el estudio del fenómeno de propagación de ondas periódicas se puede reducir al estudio de propagación de ondas sinusoidales puras. La frecuencia ν, que aparece en el primer término, se denomina *frecuencia fundamental* (en acústica, primera armónica). Los múltiplos $\nu_n = n\nu$ se denominan

frecuencias armónicas, y las ondas correspondientes a $n > 1$, ondas *armónicas superiores*. Los coeficientes de Fourier a_n y b_n representan las proporciones en que participan las ondas armónicas. El conjunto de los coeficientes $\{a_n, b_n\}$ o, mejor, su representación en función del número de orden armónico n, constituye lo que se llama el *espectro* armónico de la onda en cuestión. Obsérvese que a_n^2 y b_n^2 representan las intensidades con que intervienen las ondas armónicas. Veremos en el Capítulo 7, f que el análisis de Fourier juega un papel fundamental en la acústica.

Como ejemplo de ondas estacionarias transversales, analicemos el caso de una cuerda vibrante de longitud L, fija en sus extremos. Consideremos el caso de ondas sinusoidales puras (ya hemos visto que el caso general de ondas periódicas siempre se puede considerar como una superposición de ondas sinusoidales). Es evidente que en una cuerda vibrante no pueden propagarse ondas sinusoidales progresivas; ello sería incompatible con la condición de vínculo (llamada aquí *condición de contorno),* de que los puntos extremos permanezcan en reposo. En cambio, una onda estacionaria será compatible con la condición de contorno, siempre y cuando los extremos sean nodos de vibración. Siendo una onda estacionaria una suma de dos ondas iguales que se propagan en sentidos opuestos, también podemos interpretar esto diciendo que en una cuerda vibrante sólo puede propagarse una onda sinusoidal "que va y que viene" o, más rigurosamente, una onda que se refleja sucesivamente en los extremos fijos. La condición de que los puntos fijos sean nodos fija unívocamente las frecuencias posibles para la vibración. Efectivamente, la onda estacionaria debe ser tal que la longitud L de la cuerda sea precisamente la distancia entre dos nodos cualesquiera (7.15):

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} = \frac{nc}{2\nu_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

O sea, para las frecuencias posibles, tenemos:



$$\nu_n = n\frac{c}{2L} \qquad (7.19)$$

La frecuencia fundamental de vibración de la cuerda está dada por $n = 1$:

$$\nu = \frac{c}{2L}$$

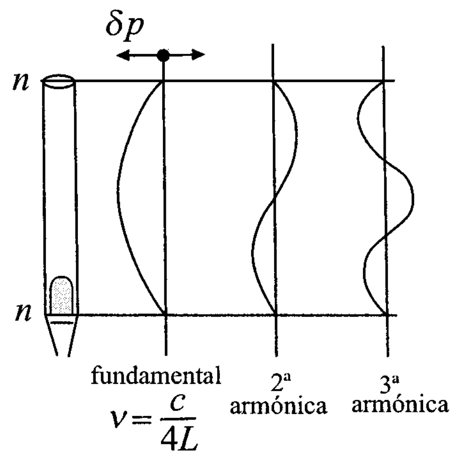
Teniendo en cuenta (7.5a),

$$\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (7.20)$$

donde F es la tensión con que está sujeta la cuerda. Por lo tanto, una cuerda vibrante sólo puede oscilar con frecuencias perfectamente determinadas, que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, que depende de los parámetros físicos del sistema oscilante, como ser la longitud de la cuerda, la densidad lineal μ y la tensión F a la que está sometida.

Estas frecuencias ν_n se denominan *autofrecuencias* o frecuencias propias de la cuerda. Obsérvese que aquí aparecen, en forma absolutamente natural y física, las frecuencias armónicas que intervienen en un desarrollo de Fourier.

El *espectro de vibración*, o sea, las intensidades relativas con que intervienen las distintas ondas correspondientes a las autofrecuencias, depende exclusivamente del mecanismo de excitación con que la cuerda ha sido puesta en oscilación (golpe seco, lugar del golpe, frotamiento con un arco, etc.). En cambio, los modos posibles de vibración, o sea, las autofrecuencias, son totalmente independientes del mecanismo inicial de excitación. Sucede algo análogo a lo que pasa con el oscilador lineal o con el péndulo ideal (Capítulo 3, h e i). Esta independencia de las frecuencias propias de un sistema oscilante, que no pueden ser modificadas por las condiciones iniciales, es la característica física más fundamental de todos los fenómenos de vibración.



Como ejemplo de ondas estacionarias longitudinales consideremos el caso de la vibración de la columna de aire en un tubo de órgano abierto. En el extremo inferior del tubo, donde está localizado el "labio" con el cual se excita la vibración, habrá un vientre de vibración, o sea, un nodo de presión. En la parte superior del tubo, abierta, la presión siempre es la atmosférica; es decir, habrá también un nodo de presión. Por lo tanto, de acuerdo con la (7.16), las longitudes de onda posibles deberán cumplir la condición

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} = \frac{nc}{2\nu_n}$$

Para las autofrecuencias tendremos

$$\nu_n = n\frac{c}{2L}$$

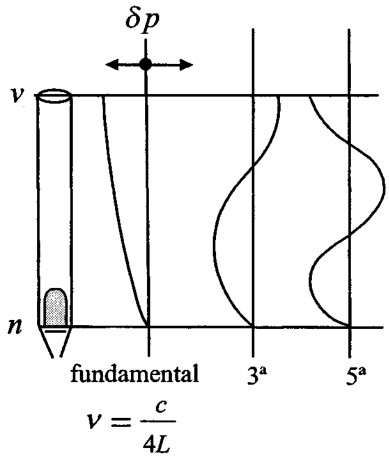
La frecuencia fundamental es:

$$\nu = \frac{c}{2L} \qquad (7.21)$$

Como aquí c es la velocidad del sonido que, de acuerdo con la (7.8), sólo depende de la temperatura, vemos que la frecuencia fundamental de una columna de aire vibrante sólo depende de la longitud del tubo (a igualdad de temperatura). No depende de la presión del aire ni de la forma del tubo. El *espectro de vibración*, o sea, la proporción con que intervienen los distintos armónicos, depende del proceso de excitación (labio) (y, en menor cuantía, de la forma del tubo).

Consideremos finalmente el mismo tubo, pero con su extremo superior tapado. En ese caso, en el extremo superior habrá un nodo de vibración (las moléculas del aire no

podrán desplazarse), por lo tanto, un vientre de presión. La condición para λ_n sale ahora de la (7.17):



$$L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4} = \frac{2n+1}{4}\frac{c}{\nu_n}$$

Las frecuencias propias son:

$$\nu_n = (2n+1)\frac{c}{4L}$$

y la frecuencia fundamental:

$$\nu = \frac{c}{4L} \qquad (7.22)$$

Obsérvese que los armónicos son sólo los múltiplos *impares* de la frecuencia fundamental. La frecuencia fundamental de un tubo cerrado es la mitad de la frecuencia fundamental del mismo tubo abierto.

f) Acústica[28]

Vamos a estudiar más explícitamente el fenómeno de las ondas de presión en gases, o sea, el capítulo de la acústica. Hemos dicho que nuestro sentido del oído es un órgano sensible a estas ondas acústicas, dentro de ciertos límites. Ante todo, nuestro oído (en realidad, el cerebro) distingue nítidamente entre ondas periódicas y ondas aperiódicas. Las primeras son percibidas como *tonos* y las segundas, como *ruido*. Analizaremos aquí solamente el caso de ondas periódicas. Consideremos una onda sinusoidal pura (tono puro) dada por la (7.9):

$$\delta p = \delta p_0 \operatorname{sen}\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c} - t\right) + \varphi\right]$$

En esta expresión aparecen tres parámetros que individualizan la onda: δp_0, ν y φ. Nuestro oído tiene las siguientes propiedades:

a) Es sensible a la *intensidad* de la onda (7.13): $j = 1/2\,\delta p_0^2/c\rho$.

b) Es sensible a la frecuencia ν, dando la sensación de *altura* de un sonido.

28. Para detalles ver el libro más reciente del autor: *Acústica y Psicoacústica de la Música*, Ricordi Americana, Buenos Aires, 1997.

c) *No* es sensible a la fase inicial φ. Dos ondas con diferencia de fase constante entre sí no pueden ser individualizadas por el oído humano.

Respecto de la intensidad, la sensibilidad fisiológica varía con la frecuencia (altura) del sonido. Es decir, a igual intensidad física *j*, dos tonos de diferente frecuencia se perciben como si tuvieran diferente intensidad. El diagrama de sensibilidad mínima (umbral) y máxima (máximo tolerable) en función de la frecuencia está dado en la figura. Ondas de frecuencia por debajo de unos 20 ciclos por segundo no se oyen (infrasonido). Ondas con frecuencias más allá de unos 18.000 cps (el límite exacto depende del individuo y de su edad) tampoco se perciben (ultrasonido). El hecho de que la intensidad mínima audible sea del orden de 10^{-16} Vatios/cm^2, correspondiendo a esto un desplazamiento ε_0 dado por (7.10) y (7.13), de sólo

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta\, p_0}{c\rho\,\omega} = \frac{2c\,\rho\, j}{c\rho\,\omega} = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2j}{c\rho}} \approx 10^{-8}\,\text{cm}$$

para $\nu \approx 2.000$ ciclos por segundo, muestra que nuestro oído es un órgano extraordinariamente sensible.

Cuando se superponen dos ondas sinusoidales, nuestro oído percibe todos los fenómenos descriptos en 7, d y 7, e, según las circunstancias de superposición:

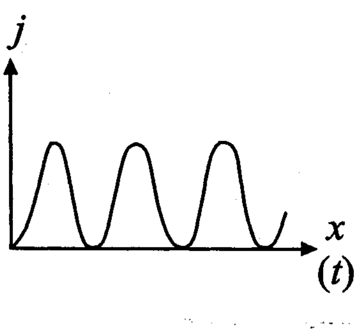
a) Cuando se superponen dos ondas de la misma frecuencia, desfasadas, se oye un solo sonido de la frecuencia dada, con una intensidad que dependerá del desfasaje en cuestión (interferencia).

b) Cuando se superponen dos ondas de frecuencias próximas, pueden suceder dos cosas.

b1) Si las frecuencias son muy parecidas, se oye un solo sonido de una frecuencia $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, con una intensidad que varía periódicamente (*batido*). La frecuencia ν_B de la variación de intensidad, o frecuencia de batido, se obtiene de (7.12) y (7.14):

$$j \sim \varepsilon_0^2 \sim \cos^2\left[2\pi\delta\left(\frac{x}{c} - t\right) + \frac{\Delta\varphi}{2}\right] = \frac{1 + \cos 2[2\pi\delta(x/c - t) + \Delta\varphi/2]}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos[2\pi\nu_B(x/c - t) + \Delta\varphi/2]}{2}$$



O sea:

$$\nu_B = 2\delta = \nu_1 - \nu_2$$

La condición para poder identificar el batido es que su frecuencia ν_B sea menor que unos 6 ciclos por segundo (para que se puedan individualizar las variaciones de intensidad).

b2) Si $\nu_1 - \nu_2 > 6$ cps, el oído percibe las dos ondas como *dos tonos separados*. Pero, además, percibe un *tercer* tono de frecuencia $\nu_1 - \nu_2$, siempre que esta diferencia supere ~20 cps. Ese tono, ficticio, pues no está físicamente presente en la superposición de ondas, es producto mismo de nuestro órgano de oído (se debe a las respuestas "no-lineales" del tímpano y del procesamiento en el sistema nervioso). Para percibirlo claramente es necesario tener el oído educado musicalmente.

c) Cuando dos ondas sonoras de igual intensidad y frecuencia se superponen con velocidades opuestas (haciéndolas reflejar en las paredes del recinto, por ejemplo) es posible percibir la onda *estacionaria* como una variación de intensidad de un punto a otro, dentro del recinto. Los nodos, en particular, son puntos en los que la intensidad del sonido se reduce a cero.

d) Frente a una onda periódica general, no sinusoidal, nuestro oído es, hasta cierto punto, un "analizador de Fourier": por un lado, es capaz de individualizar la frecuencia fundamental (página 238), la cual determina la sensación de *altura* del tono. Por otra parte, es capaz de distinguir diferentes espectros entre sí (aunque no puede individualizar las armónicas aisladamente sin buen entrenamiento musical). El espectro de un tono periódico se percibe como *timbre* del sonido. Dos ondas periódicas de igual frecuencia fundamental, pero de diferente espectro (o sea, diferente proporción relativa con que intervienen los armónicos superiores), se reconocen como dos tonos de igual altura, pero de diferente timbre.

Esta propiedad notable del oído, de ser hasta cierto grado un analizador Fourier, se traduce en otra propiedad psicofísica fundamental: la sensación de *consonancia* o *disonancia* de dos tonos. Dos tonos nos aparecen como tanto más consonantes cuanto más cercano sea el *parentesco armónico* o "parentesco Fourier" de las frecuencias fundamentales correspondientes. Entendemos por "parentesco armónico" lo siguiente. Los armónicos superiores en un desarrollo de Fourier tendrán las frecuencias $2\nu_1, 3\nu_1, 4\nu_1, \ldots$ La armónica de "parentesco más cercano" es entonces la segunda, de frecuencia $2\nu_1$. Este tono se denomina la *octava* superior del tono inicial y se percibe como el tono "más consonante" con ν_1. A su vez, ν_1 es la segunda armónica de la onda de frecuencia $\nu_1/2$, que también se percibe como el tono "más consonante" con ν_1. El tono correspondiente a $\nu_1/2$ se denomina la octava inferior. Obsérvese inmediatamente que la cuarta armónica de frecuencia $4\nu_1$ será la "octava de la octava". En cambio, el tono correspondiente a la tercera armónica de frecuencia $3\nu_1$ se denomina la *quinta* superior. El "pariente" inmediato de la quinta superior, de frecuencia $3/2\ \nu_1$ (octava baja de la quinta superior), se llama quinta inmediata. Así podemos proseguir en forma casi indefinida, generando los tonos "parientes Fourier" del tono fundamental. Estos tonos se llaman notas de la *escala armónica*. Partiendo, por ejemplo, de la nota *do*$_3$ (256 cps), engendramos a través de sus armónicos superiores y sus "parientes" inmediatos las siguientes notas (de frecuencias entre el *do*$_3$ y su octava superior *do*$_4$):

do$_3$	*do*$_4$	sol	mi	fa	la	re	....
ν	2ν	$3/2\nu$	$5/4\nu$	$4/3\nu$	$5/3\nu$	$9/8\nu$	....

Obsérvese que puede decirse que dos tonos serán tanto más consonantes cuanto más sencilla sea la relación de sus frecuencias, o sea, cuanto mayor sea el número de armónicos comunes. Efectivamente, si ν_1 y ν_2 son dos frecuencias cualesquiera, las armónicas serán, respectivamente

$$\begin{array}{ccccc} \nu_1 & 2\nu_1 & 3\nu_1 & 4\nu_1 & \ldots\ldots\ldots n\nu_1 \\ \nu_2 & 2\nu_2 & 3\nu_2 & 4\nu_2 & \ldots\ldots\ldots n\nu_2 \end{array}$$

Supongamos que $3\nu_1 = 2\nu_2$. En ese caso serán comunes $6\nu_1$ con $4\nu_2$, $9\nu_1$ con $6\nu_2$, etcétera. Pero si $3\nu_1 = 2\nu_2$, quiere decir que $\nu_2 = 3/2\nu_1$, o sea que ν_2 es la *quinta* de ν_1. En cambio, si hubiera sido, por ejemplo, $9\nu_1 = 8\nu_2$, habría mucho menos armónicos comunes (hasta un orden dado) que en el caso anterior. O sea, ν_1 y ν_2 nos aparecerán *más disonantes*. Efectivamente $\nu_2 = 9/8\nu_1$ corresponde al tono llamado *segunda* de ν_1.

Obsérvese que los "parientes Fourier" se escriben, a partir de la frecuencia fundamental ν, en la forma:

$$\nu' = \frac{n}{m}\nu \qquad \text{(n, m enteros)}$$

Cuanto menor sean ambos, *n* y *m*, tanto más cercano será el parentesco y tanto más consonantes nos aparecen los tonos correspondientes.

g) Instrumentos musicales

Los instrumentos musicales son, en esencia, sistemas en los que se producen ondas elásticas estacionarias, por métodos mecánicos o aerodinámicos. Estas ondas estacionarias, a su vez, actúan como fuente de ondas acústicas en las que intervienen las mismas frecuencias, en similar proporción (espectro).

Los *instrumentos de cuerda* se basan en el principio de la cuerda vibrante (página 239). En ellos, una cuerda de longitud *L*, de densidad lineal μ y sujeta a una tensión *F* es excitada, llevándola a una vibración por frotamiento (Capítulo 3, i), punteado o golpe, en frecuencias dadas por (7.20) y sus múltiplos (autofrecuencias):

$$\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad 2\nu, \qquad 3\nu, \ldots\ldots$$

La nota correspondiente tendrá la altura dada por la frecuencia fundamental y el timbre estará representado por el conjunto de las amplitudes a_n, b_n (espectro) con que intervienen las armónicas. En una cuerda de violín, por ejemplo, la altura varía con μ (las

cuatro cuerdas tienen diferente densidad lineal μ), con F (cada cuerda se afina aumentando o disminuyendo la tensión mediante las clavijas) y con L (la nota particular se ajusta apretando la cuerda con el dedo, dándole así una longitud libre L dada). El timbre se puede variar, modificando las condiciones de excitación (posición y presión del arco, forma de colocar el dedo, etc.). La intensidad del sonido depende de la velocidad con la que se desliza el arco.

El violín es un instrumento de cuerda, de frecuencia variable en forma continua. El piano y el címbalo, en cambio, tienen notas de frecuencia fija. Para los instrumentos de frecuencia fija fue necesario introducir (en el siglo XVII) otra escala musical: la *escala temperada* o escala cromática. En ella se hacen coincidir "por decreto" notas de frecuencias ligeramente diferentes, como, por ejemplo, el la sostenido y el si bemol, el do # y el re *b*, etc. Se la obtiene dividiendo la octava en 12 intervalos iguales (semitonos cromáticos).

Los instrumentos de viento se basan en el principio del tubo de órgano (página 240). Los hay de frecuencia variable en forma continua (trombón, trompeta) y de frecuencias fijas (órgano, flauta). En todos ellos se excitan vibraciones estacionarias de una columna de aire, las cuales, a su vez, excitan ondas sonoras en el medio ambiente. De acuerdo con la fórmula (7.21) para la frecuencia fundamental $\nu = c/2L$, hay aquí un solo parámetro que fija la altura del tono, dado por la longitud de la columna de aire L (la velocidad c depende sólo de la temperatura ambiente). La única forma de modificar la frecuencia de un tono de un instrumento de viento consiste en variar la longitud de la columna de aire vibrante. Como las longitudes L asociadas a las frecuencias bajas son muy grandes (para el do_2 (32 cps) es de 5,4 m) los instrumentos de viento de tonos graves (tuba, registros graves del órgano) tienen dimensiones muy grandes. Para afinar un instrumento de viento, (un órgano,[29] por ejemplo), es necesario modificar ligeramente la longitud de los tubos (en cada tubo hay dispositivos para ello). Entre los tubos de órgano, los hay abiertos y tapados en la parte superior. De acuerdo a lo expresado por (7.22), un tubo tapado suena una octava más bajo que un tubo abierto de la misma longitud. Obsérvese que como c depende de la temperatura, un órgano se desafina al cambiar la temperatura del aire.

Finalmente, notemos que si a los fuelles de un órgano los alimentásemos con hidrógeno ($c_{\text{hidrógeno}} \cong 4c_{\text{aire}}$), todas las frecuencias se cuadriplicarían aproximadamente: todo el órgano sonaría dos octavas más alto.[30]

29. No todos los registros del órgano pertenecen a la clase tipo flautas. Los registros llamados "de lengüeta" (trompeta, oboe, etc.) están constituidos por tubos en los que la vibración primaria es producida por una lengüeta de metal vibrante. La afinación de éstos se logra modificando la longitud libre de la lengüeta. Instrumentos de viento como el clarinete y el oboe también trabajan en base a lengüetas.

30. Cuando se aspira hidrógeno puro (¡atención!), se habla casi dos octavas más alto, apareciendo además vocales trastrocadas.

Para afinar un instrumento según la escala armónica, en la que los tonos son todos "parientes Fourier", se utiliza el proceso de los batidos: con una frecuencia patrón (diapasón) se afina una nota (por ejemplo, el do_3), haciéndola sonar simultáneamente y prestando atención a variaciones periódicas de intensidad (batidos). En caso de ocurrir éstos, se varía la frecuencia de la nota en el sentido de hacer decrecer la frecuencia de batido; cuando éste desaparece y la intensidad es absolutamente constante, la nota estará afinada (su frecuencia fundamental será idéntica a la frecuencia patrón). Una vez afinada la nota do_3, se procede a la afinación de todas las octavas. Esto también se logra por el proceso de batido, puesto que en la nota del do_3 siempre estará presente con suficiente amplitud la segunda armónica (de frecuencia correspondiente a la fundamental del do_4), la que provocará el batido con algún do_4 desafinado. Pero también la tercera armónica es aún suficientemente intensa como para producir batidos con todas las quintas (*sol*), permitiendo la afinación de éstas. Se prosigue afinando las quintas de las quintas (*re*), etcétera, hasta cubrir toda la escala armónica. Afinando de esta manera, el *fa* # y el *sol b*, el *sol* # y el *la b*, etc., no coincidirán, pues corresponden a "parientes Fourier" diferentes. Lo notable es que para afinar un instrumento según la escala armónica, *no* es preciso tener el oído educado musicalmente, puesto que se procede mediante un método físico (batidos). Muy distinto es con la escala temperada o cromática (en uso desde el siglo XVII): en ella sólo se puede usar el fenómeno de los batidos para afinar las octavas. Para el resto de las notas es necesario tener oído absoluto (o disponer de un patrón electrónico variable).

Sobre el autor



Juan G. Roederer es Profesor Emérito de Física de la Universidad de Alaska, Fairbanks. Nacido en Italia en 1929, pasó su infancia en Austria y su adolescencia en la Argentina. En 1952 se recibió de Doctor en Ciencias Físico-matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Entre 1956 y 1966 fue profesor titular en esa facultad, así como director del Centro Nacional de Radiación Cósmica. Después del golpe militar de 1966, emigró con su familia a los Estados Unidos, donde se desempeñó como profesor de física en la Universidad de Denver hasta 1977. Ese año fue designado director del mundialmente reconocido Instituto de Geofísica de la Universidad de Alaska, cargo que ejerció hasta fines de 1986. Desde entonces se dedica a la enseñanza e investigación científica en esa universidad. Entre 1985 y 1991 sirvió a dos presidentes de los Estados Unidos en el cargo nacional de presidente de la United States Arctic Research Commission. Actualmente es Senior Consultant (*part time*) del Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics en Trieste, Italia.

Roederer es autor de más de doscientas publicaciones en revistas científicas sobre temas de física espacial, política científica y psicoacústica, y ha escrito cuatro textos universitarios, entre los que figura el presente, así como el libro *Acústica y Psicoacústica de la Música* (Ricordi Americana, 1997). Sus temas de investigación principales son, en la actualidad, la magnetósfera de Júpiter, los mecanismos cerebrales de percepción de música y el significado del concepto información en biología y física. Es miembro de las Academias Nacionales de Ciencias de la Argentina (Buenos Aires, 1983, y Córdoba, 2001) y de Austria (1985), y de la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (1991). Entre las muchas distinciones recibidas a lo largo de su carrera figuran la medalla "100 Years of International Geophysics" de la antigua Academia Soviética de Ciencias; tres premios de la NASA por su participación como co-investigador en la misión Galileo a Júpiter; y el premio Flinn Year 2000 de la American Geophysical Union (AGU), otorgado por su "generosa y desinteresada dedicación al servicio de la geofísica".

Roederer es miembro honorario de la Asociación Argentina de Geodestas y Geofísicos y la International Association of Geomagnetism and Aeronomy, así como Fellow de la AGU y la American Association for the Advancement of Science. También es organista, habiendo estudiado con Héctor Zeoli en Buenos Aires y Hans Jendis en Göttingen, Alemania.

Geophysical Institute, University of Alaska-Fairbanks
Fairbanks, Alaska, 997775, USA
jgr@gi.alaska.edu / www.gi.alaska.edu/~Roederer

Se terminó de imprimir en mayo de 2008, en los
talleres de **Gama Producciones Gráficas SRL**,
Estanislao Zeballos 244, (1870) Avellaneda,
Pcia. de Buenos Aires.

manuales

Hay muchos libros de física elemental con ilustraciones en color, textos detallados con notas históricas, abundantes problemas con sus respectivas soluciones, bibliografía extensa, etc. El presente volumen es mucho más modesto, pero su propósito no es menos ambicioso: ayudar a *entender* la física cuando ésta aparezca por primera vez en la carrera de un estudiante universitario.

Después de casi cuarenta años y treinta reimpresiones, Eudeba ha preparado una edición más "elegante" de *Mecánica Elemental*. El contenido, sin embargo, permaneció prácticamente intacto. Los muchos comentarios positivos recibidos de ex estudiantes de física durante el transcurso de todos estos años han convencido al autor de seguir el viejo proverbio norteamericano, *if it ain't broke, don't fix it* (si no está roto, no lo arregles).

En el Capítulo 1 se analiza brevemente el proceso de medición y se da una rápida visión de la teoría de errores. En el Capítulo 2 se intenta convencer al estudiante de que la cinemática no es una mera rama de la geometría, sino que tiene sus propios ingredientes de física genuina. En el Capítulo 3 se presenta la fundamentación de la mecánica en base al estudio de la interacción de dos cuerpos puntuales y se discuten las propiedades fundamentales de las interacciones gravitatorias. En el Capítulo 4 se deducen los principales teoremas de conservación y se dan ejemplos de su aplicación. El Capítulo 5 describe la cinemática y dinámica del cuerpo rígido, con explicaciones del comportamiento a veces "antiintuitivo" de los cuerpos rotantes. Los dos últimos capítulos versan sobre el medio continuo: el sexto trata de las deformaciones elásticas en casos de equilibrio, y el séptimo, de la propagación de ondas, con ejemplos de la acústica. Para todo esto es requisito entender los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral de una variable.

50 años
libros para todos
eudeba

ISBN 978-950-23-1225-5
9 789502 312255